

令和 3 年 5 月 26 日現在

機関番号：15301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17601

研究課題名(和文)写像類群による4次元トポロジーの地誌学と手術の研究

研究課題名(英文) Study of the geography for 4-dimensional topology and of surgery via mapping class groups

研究代表者

門田 直之 (Monden, Naoyuki)

岡山大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：60611986

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：4次元トポロジーにおいて、曲面の各点に対し曲面が対応するようなもの(つまりファイバー束やファイバー空間)は重要な研究対象となっている。申請者はLefschetz fibration, 曲面上の曲面束と呼ばれるもので、新たな例を構成した。また、その際に使われる写像類群という代数的な対象について、Dehn twistという元の安定交換子長(Dehn twistの複雑度を測るもの)について、新たな上界を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

4次元を境にトポロジーの研究は大きく変わる。他の次元に比べて4次元多様体の全体像はわかっていない部分が多いため、様々な例を構成することにより全体像の振る舞いを調べようという研究が活発に行われている。本研究は新たな4次元多様体を構成したり、4次元多様体に入るLefschetz fibrationや曲面上の曲面束の構造の新たな例を構成したことにより、4次元多様体の全体像の解明への足掛かりになるものと思われる。

研究成果の概要(英文)：In 4-dimensional topology, fiber bundle structures and fiber space structures of 4-manifold are important objects of research. We constructed some new examples of Lefschetz fibrations and surface bundles over surfaces. In addition, we gave a new upper bound for stable commutator length of a Dehn twist in the mapping class group of a surface.

研究分野：低次元位相幾何学

キーワード：Lefschetz fibration 写像類群

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

4次元多様体全体は未解明な部分が多く漠然としているため、色々な例の構成によって4次元多様体全体の振る舞いを調べる研究は大きな意味を成す。この背景のもと、申請者は、Lefschetz pencil/fibration の構造が入る4次元多様体の構成に取り組んできた。4次元多様体において、Lefschetz pencil/fibration の構造とシンプレクティック構造は同値である。さらに、Lefschetz pencil/fibration と写像類群のある関係式が対応する。また、多様体の手術は写像類群において関係子の置き換えに対応する。本研究は、これらに事実に基づき、4次元シンプレクティック多様体や Lefschetz fibration の「既知の存在可能領域とその空白部分」や「予想される存在領域」(地誌学)を、写像類群の関係式の構成により実現しようというものである。また、新たな手術の開発や手術の解明を、関係子の置き換えを用いて、写像類群の立場から行う。さらに、得た技術を用いて、Lefschetz pencil/fibration の構造、写像類群の安定交換子長の問題解決へ応用する。研究を進める上で、申請者は次の結果を得ている(以下、多様体は4次元)。

- (a) 球面上の Lefschetz fibration の地誌学問題における、Hain 予想の反例を無限個構成した。
- (b) 多様体が最大自己交差数の切断を持つ Lefschetz fibration を許容するとき、取り得るオイラー標数の範囲は有界か? という問題(Smith の問題の一般化) に否定的解答を与えた。
- (c) Lefschetz pencil を許容する多様体に対し、それらがとり得るオイラー標数の範囲が有界であることの base point の個数に関する必要十分条件を与えた。
- (d) 種数2の Lefschetz fibration を許容する多様体の最小オイラー標数をほぼ決定した。
- (e) 代表的な種数 g の Lefschetz pencil を許容する多様体に有理ブローダウンを施し、再び種数 g の Lefschetz pencil を許容するものを構成した。また、代表的な種数2の Lefschetz fibration のファイバー和に有理ブローダウンを施し、種数2の Lefschetz fibration を許容し、第一 Chern 類の自己交差数が1、基本群が単連結・有限巡回群となる多様体を構成した。
- (f) 境界についての Dehn twist の交換子長・安定交換子長を決定し、非分離的単純閉曲線の Dehn twist の安定交換子長の良い上界を与えた。さらに、曲面の種数が2の場合、単純閉曲線が非分離的・分離的、Dehn twist の安定交換子長が異なることを示した。

2. 研究の目的

4次元シンプレクティック多様体と Lefschetz fibration の地誌学の解明、新たな手術の開発や手術の解明に取り組む。また、得た技術を Lefschetz pencil/fibration の構造や写像類群の安定交換子長の問題に応用する。

- (1) [Lefschetz fibration の地誌学] 上記(a) では、slope 不等式の反例である、小さい slope を持つ例を構成した。これに代わる不等式とより小さい slope を持つ例の構成を目指す。また、既知の存在可能域(シンプレクティック Parashin-Arakelov 不等式など) は存在不明の空白が多いため、それらを埋めていく。
- (2) [4次元シンプレクティック多様体の地誌学] 負のオイラー標数を持つ例、Bogomolov-宮岡-Yau(BMY)不等式を満たさない例を構成する。0でない符号数を持つ多様体が曲面上の曲面束を許容する場合、BMY 不等式を満たす上、オイラー標数がある程度大きい。そこで、等号上やその付近の例や、ファイバーと底空間の種数が小さい、即ち、オイラー標数が小さい例を構成する。
- (3) [手術の開発、関係子の置き換えの発見] 4次元シンプレクティック多様体において、シンプレクティック小平次元を変える手術は見つかっていない。そこで、そのような手術を開発する。また、この手術や結び目手術に対応する写像類群の関係子の置き換えを見つける。
- (4) [Lefschetz pencil/fibration の構造] Lefschetz pencil の構造がわかっていない重要な例(シンプレクティック Calabi-Yau 多様体など) に対し、その構造を与える。また、有理曲面や線織面のみ、非同型な Lefschetz fibration 構造の存在がわかっていない。この2つに対し、非同型な構造を与える。さらに、Lefschetz fibration の既約性に関する Stipsicz 予想の反例の構成を目指す。
- (5) [写像類群の安定交換子長] Dehn twist のべき乗を交換子の積で具体的に表し、Dehn twist の安定交換子長の上界を改善する、あるいは決定する。

3. 研究の方法

Lefschetz fibration や曲面上の曲面束の構成は写像類群の関係式を構成することにより行う。写像類群の新たな関係式を構成する方法として、これまでに構成されたものを(ねじって)足し合わせ、その際に現れる word を別の関係式に置き換えることで構成する。できあがった多様体のオイラー標数の計算は非常に簡単であるが、符号数の計算は遠藤久顕氏-永見誠二氏の方法や遠藤久顕氏-鎌田聖一氏-長谷川功-田中心氏の方法を用いる。また、ゲージ理論などを用いて、

構成可能か不可能かを示す。

4. 研究成果

(1) 地誌学における Noether 不等式を満たさない領域のすべての点(特に多様体は単連結)に対し, Lefschetz fibration の構造が入ることを示した. Noether 不等式を満たさない多様体に対し, Lefschetz fibration の構造が入る例は Fintshel-Stern により構成されていたが, それらはある直線上のみであった. その意味で, 今回の例はより広い領域に対し構成され, Fintshel-Stern の例の一般化であると考えることができる. これらの例の構成により, 地誌学における Noether 不等式を満たさない領域については, Lefschetz pencil と Lefschetz fibration の違いが(大きくは)見られないことがわかった. 任意の有限表示群に対し, その群を基本群にもつような 4 次元シンプレクティック多様体や Lefschetz fibration はこれまでにいくつか構成されていた. 一方, Noether line の下の領域に任意の有限表示群を基本群にもつ 4 次元シンプレクティック多様体は構成されていたが, Lefschetz fibration についてはいまだ見つかっていなかった. 申請者は, 任意の有限表示群を基本群にもち, 全空間が極小であり, Noether line の下の領域にある多様体について, Lefschetz fibration の構造が入る例を構成した. 特に, Noether line の下の領域にある多様体は複素多様体ではないため, 得られた Lefschetz fibration は非正則であることがわかる. Lefschetz fibration と写像類群の文字列である条件を満たすものが対応する. 申請者は, 与えた Lefschetz fibration においても対応する写像類群の文字列を具体的に与えている. 上記の研究はミネソタ大学のアフメドフ氏との共同研究である.

(2) 様々な数学者により, 全空間の符号数が消えないような曲面上の曲面束の構成がなされてきた. 底空間の種数が 1 以下, ファイバーの種数が 2 以下のとき, 全空間の符号数が消えることが知られている. 底空間の種数が 2 の場合の例は, Brayn-Donagi により構成されているが, それらのファイバーの種数や符号数は散発的であった. 申請者は, 底空間の種数が 2 の曲面上の曲面束で, 取りうる符号数の値をすべてもつような例を構成した. 特に, 構成した例は, 符号数に依存するある値以上のすべての値を種数にもつ上に, 自己交差数 0 の切断を許容する. Brayn-Donagi の例は切断をもっているかどうかはわかっていないため, 符号数やファイバーの種数, 切断の存在において, Brayn-Donagi の例を改善した例を構成した. 自己交差数 0 の切断を持つと, 切断和という操作を行うことができ, さまざまな曲面上の曲面束を得ることができる. 系として, 底空間の種数が 2 の非正則な曲面上の曲面束で符号数が消えない例を構成することができた. その他にも, 知られている例の中で最もオイラー標数が小さいような符号数が消えない曲面上の曲面束を構成した.

上述の構成は写像類群を組み合わせた的に扱うことで得られる. このときに得られた組み合わせ的な技術を用いて, Dehn twist の安定交換子長に対し, より鋭い上界を与えた. 特に, 種数がある程度大きい場合, 超楕円的写像類群と写像類群の Dehn twist の安定交換子長の値にはギャップが現れることを示した.

(3) 2 つの(ファイバーの種数が等しい)Lefschetz fibration から新たな Lefschetz fibration を構成する基本的な方法として, ファイバー和という操作が知られている. Stipsicz は次の 2 つの予想をしている:(A) ファイバー和分解不可能な Lefschetz fibration は(-1)-切断を持つ. つまり, ファイバー和分解不可能な Lefschetz fibration は Lefschetz pencil の base point を blow up して得られる.(B) Lefschetz fibration の全空間が非極小であれば, ファイバー和分解不可能である.

(A)の予想は, ファイバーの種数が 2,3 のとき, 反例が構成されている. 申請者はマサチューセッツ大学の Baykur 氏, 慶応義塾大学の早野氏との共同研究により, ファイバーの種数が 3 以上であれば, (A)の反例が存在することを示した. また, これらの例の構成途中で, 全空間が symplectic Calabi-Yau 多様体(特に symplectic K3 曲面)である Lefschetz fibration を構成している.(B)の予想は, 肯定的に証明されている. 申請者は, ミネソタ大学の Akhmedov 氏との共同研究で, この逆が成り立たない, すなわち, ファイバー和として分解できない(ファイバーの種数が 2 の)Lefschetz fibration で全空間が極小である例が存在することを示した. これらの 2 つの結果は Lefschetz fibration のファイバー和分解についての既約性に関する結果である.

(4) 線織面に Lefschetz fibration の構造が入るときの, Lefschetz fibration のファイバーの種数, 線織面の種数と blow-up の回数について結果を得た. 具体的に述べると, 種数 h の線織面の m 回 blow-up が種数 $2g+h-1$ の Lefschetz fibration の構造を持つことの必要十分条件は, $m=4n$ であることである(ただし, $h>n$ という条件を仮定しておく). なお, この研究はミネソタ大学の Anar Akhmedov 氏との共同研究に基づく.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 2件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hamada Noriyuki, Kobayashi Ryoma, Monden Naoyuki	4. 巻 298
2. 論文標題 Nonholomorphic Lefschetz fibrations with(-1)-sections	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 375 ~ 398
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2019.298.375	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Monden Naoyuki	4. 巻 100
2. 論文標題 Signatures of surface bundles and scl of a Dehn twist	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 957 ~ 986
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/jlms.12247	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akhmedov Anar, Monden Naoyuki	4. 巻 60
2. 論文標題 Genus 2 Lefschetz fibrations with $b_2^+ = 1$ and $c_1^2 = 1, 2$	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1419 ~ 1451
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2019-0067	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件／うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Naoyuki Monden
2. 発表標題 Signatures of surface bundles over surfaces
3. 学会等名 Low Dimensional Topology and Gauge Theory（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------