

令和元年6月24日現在

機関番号：12701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17605

研究課題名(和文)特異点を許容する幾何学的構造と実現問題

研究課題名(英文)Geometric structures which admits singular points and the realization problem

研究代表者

本田 淳史(HONDA, Atsufumi)

横浜国立大学・大学院工学研究院・准教授

研究者番号：90708611

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：曲面をある種の曲率条件(ガウス曲率や平均曲率が一定など)のもとで研究する際、特異点が自然に現れる。その観点から近年、「外の空間を払拭した、特異点を許容する内在的な幾何構造」が盛んに研究されており、特異点付きの内在的幾何学(リーマン幾何学)が進展している。その基本的問題のひとつに半正定値計量の実現問題があるが、特定の場合以外はその問題は解決されていなかった。本研究では、波面の誘導計量をモデルとしたKossowski計量という半正定値計量は実解析的な場合に局所等長実現可能であることを示すなど、特異点を持つ曲面の幾何学や特異点付きの内在的幾何学の理論を発展させる結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、Kossowski計量という半正定値計量は実解析的な場合に局所等長実現可能であることを示すなど、特異点を持つ曲面の幾何学や特異点付きの内在的幾何学の理論における中心的な結果を得た。このような結果は、特異点を持つ曲面の理論を内在的な半正定値計量の幾何学に一般化しているため今後の応用が期待される。すでにいくつかの結果はローレンツ多様体の混合型曲面の型変化の理論の構築に応用されており、本研究で得られた結果は、理論物理等を含む広範な分野へも応用されることが期待できると思われる。

研究成果の概要(英文)：When we study surfaces under some natural curvature conditions, such as surfaces of constant Gaussian/mean curvature, singular points frequently appear on such surfaces. Recently, based on such a differential geometric study of surfaces with singular points, the theory of intrinsic geometry with singularities is progressing rapidly. Although the isometric realization problem of positive semi-definite metrics as surfaces with singular points is one of the fundamental problem, the problem was solved only in a specified case. In this study, we proved every real analytic Kossowski metric can be isometrically realized locally, where Kossowski metrics are positive semi-definite metric modeled on induced metrics of wave fronts. Including such a theorem, we obtained several fundamental results on surfaces with singular points, and intrinsic geometry with singularities.

研究分野：微分幾何学

キーワード：曲面 特異点 波面 カスプ辺 ツバメの尾 Kossowski計量 連接接束 等長実現

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

曲面をある種の曲率条件(ガウス曲率や平均曲率が一定など)のもとで研究する際、特異点が自然に現れる。その観点から近年、連接接束などの「外の空間を払拭した、特異点を許容する内在的な幾何構造」が盛んに研究されており、特異点付きのリーマン幾何学が進展している。その基本的問題のひとつに、特異点を許容する任意の半正定値計量は誘導計量として実現されるかどうかを問う「半正定値計量の実現問題」があるが、特定の場合以外はその問題は解決されていなかった。

2. 研究の目的

本研究では、(I)半正定値計量の特異点の実現問題、(II)特異点を許容する空間型の間の等長はめ込みの分類の2つの課題に取り組むことにより、多様体上の特異点を許容する幾何学的構造の理論を確立することを目標とする。

3. 研究の方法

(I)半正定値計量の特異点の実現問題については、まず Whitney 計量の交差帽子としての等長実現問題について、計量を特異点においてブローアップして Cauchy-Kowalevski の定理を適用しブローダウンするアプローチ、または、形式的べき級数解を求めその収束を議論する方法をとる。数式処理ソフトなどを使用し様々な具体例を通して数値実験も行う。Kossowski 計量の実現定理の精密化について、波面的な写像の中で頻りに現れる特異点(ツバメの尾、カスプ状交差帽子)の場合を、特異点を持つ空間曲線の理論を構築し、その曲率関数や捩率関数とツバメの尾の内的不変量との関係を導き出すことにより解決する。5/2-カスプ辺にも同様の精密化を試みる。本研究で得られた結果を通して、Kossowski 計量や Whitney 計量に限らない一般的な特異点を持つ半正定値計量に対して理論の統一を図る。(II)「特異点を許容する空間型の間の等長はめ込みの分類」について、特異点集合の構造とガウス写像の像との関係を調べることにより、村田-梅原による3次元ユークリッド空間の2次元の平坦波面の大域的な分類を高次元の場合に拡張することを目指す。阿部による Hartman-Nirenberg の定理の複素の類似をもととした複素解析等長はめ込みの波面としての大域的な分類問題を、Smith や村田-梅原による手法を用いて解決することを目指す。また、研究代表者の研究動向をよく知る研究者(東京工業大学・梅原雅顕氏、山田光太郎氏、神戸大学・佐治健太郎氏、直川耕祐氏、北海道大学・泉屋周一氏など)に研究相談・討議の機会をいただく。さらに、微分幾何学・特異点論の国内外の研究集会に進んで参加・講演する。

4. 研究成果

まず(I)半正定値計量の特異点の実現問題については、直川耕祐氏、梅原雅顕氏、山田光太郎氏との共同研究で、任意に与えられた実解析的な Kossowski 計量を第一基本形式に持つような3次元ユークリッド空間のフロントルが存在することを示した。また、その応用として、極限法曲率が消えないようなカスプ辺、カスプ状交差帽子の等長変形のモジュライ空間を決定した。この結果は現在投稿中である(arXiv:1710.02999)。また、佐治健太郎氏との共同研究で、ランフォイドカスプ辺(5/2-カスプ辺)の幾何学的性質を調べ、極限法曲率が消えないようなランフォイドカスプ辺の等長変形のモジュライ空間を決定することができた(雑誌論文1)。また、直川耕祐氏、佐治健太郎氏、梅原雅顕氏、山田光太郎氏との共同研究において、与えられた空間曲線の特異点集合の像として持つような等長的なカスプ辺の個数は、ジェネリックな場合には4つあることを示した。現在投稿中である。(II)特異点を許容する空間型の間の等長はめ込みの分類については、村田-梅原による3次元ユークリッド空間の完備な平坦波面の分類や4頂点型定理の高次元化を目標として研究を行った。そこで、研究代表者の以前の研究結果を用いることで、完備かつ平坦な n 次元連接接束の $(n+1)$ 次元ユークリッド空間への波面としての等長実現は、特異点を許容せず柱面に限ることを示した(ただし n は3以上の整数)。これにより、同じ非負の断面曲率を持つ空間型の間の波面としての等長はめ込みの分類を与えた(雑誌論文4)。さらに、平坦波面の共役を適切に定義することで、特異点の双対性が成り立つことを示した(現在、投稿中)。ローレンツ多様体内の混合型曲面の光的点は誘導計量の特異点とみなされる。佐治健太郎氏、寺本圭佑氏と共同で、波面の幾何学的性質の研究の手法を適用することで、有界なガウス曲率を持つ混合型曲面に対するガウス・ボンネの定理を得た。現在、投稿中である(arXiv:1811.11392)。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 10 件)

1. Atsufumi Honda, Kentaro Saji, Geometric invariants of 5/2-cuspidal edges, Kodai Mathematical Journal, 査読有, 印刷中 (2019)
2. Atsufumi Honda, Kosuke Naokawa, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, Isometric realization of cross caps as formal power series and its applications, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, Volume 48 (2019), pp. 1-44. DOI:10.14492/hokmj/1550480642.

3. Atsufumi Honda, Miyuki Koiso, Kentaro Saji, Fold singularities on spacelike CMC surfaces in Lorentz-Minkowski space, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, Volume 47 (2018), pp. 245-267. DOI:10.14492/hokmj/1529308818
4. Atsufumi Honda, Complete flat fronts as hypersurfaces in Euclidean space, Proceedings of the Japan Academy, Ser. A, Mathematical Sciences, 査読有, Volume 94 (2018), pp. 25-30. DOI:10.3792/pjaa.94.25
5. Atsufumi Honda, Duality of singularities for spacelike CMC surfaces, Kobe Journal of Mathematics, 査読有, Volume 34 (2017), pp. 1-11. <http://www.math.kobe-u.ac.jp/jmsj/kjm/abstracts.html>
6. Atsufumi Honda, Isometric immersions with singularities between space forms of the same positive curvature, Journal of Geometric Analysis, 査読有, Volume 27 (2017), pp. 2400-2417. DOI:10.1007/s12220-017-9765-8
7. Atsufumi Honda, Miyuki Koiso, Masatoshi Kokubu, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada, Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times, Differential Geometry and its Applications, 査読有, Volume 52 (2017), pp. 64-77. DOI:10.1016/j.difgeo.2017.03.009
8. Udo Hertrich-Jeromin, Atsufumi Honda, Minimal Darboux transformations, Beitrage zur Algebra und Geometrie Volume, 査読有, 58 (2017), pp. 81-91. DOI:10.1007/s13366-016-0301-y
9. Atsufumi Honda, On associate families of spacelike Delaunay surfaces, Contemporary Mathematics, 査読有, Volume 675 (2016), pp. 103-120. DOI:10.1090/conm/675
10. Atsufumi Honda, Weakly complete wave fronts with one principal curvature constant, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, Volume 70 (2016), pp. 217-226. DOI:10.2206/kyushujm.70.217

[学会発表](計 23 件)

1. Atsufumi Honda, Mixed type surfaces with bounded Gaussian curvature in three-dimensional Lorentzian manifolds, AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting, 2019 年
2. 本田淳史, 3 次元ローレンツ多様体内の有界なガウス曲率を持つ混合型曲面, 日本数学会 2019 年度年会, 2019 年
3. 本田淳史, 3 次元ローレンツ多様体内の有界なガウス曲率を持つ混合型曲面, 名城幾何学研究集会, 2019 年
4. 本田淳史, R^3_1 内の空間的曲線が平面的であるための条件, 淡路島幾何学研究集会 2019, 2019 年
5. Atsufumi Honda, Singularities of wave fronts and curvatures, Summer School 2018 "Geometric shape generation", 2018 年
6. 本田淳史, 3 次元ローレンツ多様体内の有界なガウス曲率を持つ混合型曲面, 部分多様体幾何とリー群作用 2018, 2018 年
7. 本田淳史, 混合型曲面の等長変形, 日本数学会 2018 年度年会, 2018 年
8. 本田淳史, 混合型曲面の等長変形, 特異点論とその応用, 2018 年
9. 本田淳史, 混合型曲面に対する曲面論の基本定理と等長変形, 淡路島幾何学研究集会 2018, 2018 年
10. 本田淳史, 退化点を持つ計量の等長実現問題, 第 21 回関東若手幾何セミナー, 2017 年
11. 本田淳史, 高次元の平坦波面について, 広島幾何学研究集会 2017, 2017 年
12. Atsufumi Honda, Isometric immersions with singularities between space forms of the same non-negative curvature, Geometric and Algebraic Singularity Theory, 2017 年
13. Atsufumi Honda, Isometric immersions with singularities between space forms of the same non-negative curvature, International Workshop on Differential Geometric Aspects of Integrable Systems, 2017 年
14. 本田淳史, 同じ曲率を持つ空間型の特異点を許容する等長はめ込み', RIMS 研究集会「部分多様体論の潮流」, 2017 年
15. 本田淳史, 半正定値計量の幾何学と等長実現問題, 日本数学会 2017 年度年会(特別講演), 2017 年
16. 本田淳史, 曲面の型変化と幾何構造の延長可能性, 淡路島幾何学研究集会 2017, 2017 年
17. 本田淳史, 半正定値計量の幾何学と等長実現問題, 室蘭工大数理科学談話会&第 5 回室蘭連続講演会, 2017 年
18. 本田淳史, 極小曲面の Darboux 変換, 測地線及び関連する諸問題 2017, 2017 年
19. 本田淳史, 極小曲面の Darboux 変換, 部分多様体論・湯沢 2016, 2016 年
20. 本田淳史, 極小 Darboux 変換, 福岡大学微分幾何研究会, 2016 年
21. 本田淳史, 極小曲面の Darboux 変換, 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会, 2016 年
22. Atsufumi Honda, Minimal Darboux transformations, Geometric aspects of singularities, 2016 年

23. 本田淳史, 極小曲面の Darboux 変換, 第 63 回幾何学シンポジウム, 2016 年

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/bentiannopeji/>

https://er-web.ynu.ac.jp/html/HONDA_Atsumi/ja.html

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。