様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ５ 月 １０ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2018
課題番号：１６Ｋ１７６０６

研究課題名（和文）モジュレーション空間とその偏微分方程式への応用

研究課題名（英文）Modulation space and its applications to PDEs

研究代表者
小林　政晴（Kobayashi, Masaharu）

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：３０５１６４８０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：モジュレーション空間に関する研究はまだ日が浅く、重要にも関わらず、未解決な問題が多く存在する。本研究ではモジュレーション空間に関する「基本課題の解明」と「偏微分方程式への応用」に関する研究を行い、主要な結果として(1)モジュレーション空間上の作用関数の特徴づけ (2)波束変換を用いたSobolev空間型の波面集合の特徴づけ(3)モジュレーション空間における高階の分散型方程式の評価を得ることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
今回の研究を通じて解決できた問題以外にも解決しなければならないような（基礎的ではあるが重要な）モジュレーション空間に関する問題はまだまだ多く残っている。しかし、今回得られた研究成果はモジュレーション空間の研究において更なる成果を挙げる研究の足掛かりになることが期待できる。特に、空間変数だけではなく、時間変数を考慮した短時間フーリエ変換を用いる方法が高階の分散型方程式にも応用可能であることが示せたことや副産物として得られる斉次型モジュレーション空間は今後、調和解析に現れるさまざまな作用素の研究に応用可能であると思われる。

研究成果の概要（英文）：Throughtout this project, we studied the basic properties of modulation space and its applications to PDEs. Especially, we obtain the followings (1) We obtained the charazterization of operatinig function on modulation spaces (2) We gave a characterization of Sobolev-type wave-front sets by using the wavepacket transform (3) We obtained the estimates for the higher order dispersive operators on modulation spaces.

研究分野：調和解析

キーワード：モジュレーション空間　ウィナーアマルガム空間　作用関数　波面集合　分散型方程式

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９、CK－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

モジュレーション空間 $M^{p,q}_s(R^n)$及びその類似物であるウィーナーアマルガム空間 $W^{p,q}_s(R^n)$は 1980 年頃にオーストリアの H. G. Feichtinger 氏により導入されたユークリッド空間 R^n 上の関数空間である。近年多くの研究者に注目されており、関数空間そのものの研究に留まらず、擬微分作用素や偏微分方程式の研究にも応用されている (実際、2006 年に K. Gröchenig 氏 (ウィーン大学) のグループと B. X. Wang 氏 (北京大学) のグループが独立に「自由粒子のシュレディンガー作用素 $e^{it\Delta}$ はルベーグ空間 $L^p(R^n)$やベゾフ空間 $B^{p,q}_s(R^n)$上では有界ではないが、モジュレーション空間上では有界になる」という誰もが予想しなかった結果を証明し、多くの研究者を驚かせた)。これらの関数空間に関する研究はまだ日が浅く、重要にも関わらず、未解決な問題が多く存在する。例えば、「f が $M^{p,q}_s(R^n)$の元ならば|f|も $M^{p,q}_s(R^n)$の元になるか？」という基本的な問題でも限られた場合を除けば未解決である。更なる進展のため、モジュレーション空間とウィーナーアマルガム空間に関する「基本課題の解明」と「偏微分方程式への応用」に関する研究を行う必要があった。

２．研究の目的

(1) D. G. Bihimani と P. K. Ratnakumar は 2016 年に非線形シュレーディンガー方程式と非線形クライン・ゴルドン方程式の研究において、A(T) (すなわち、絶対収束するフーリエ級数を持つトーラス T 上の連続関数の空間)を特徴づける重要な定理の一つとして知られる Katznelson の類似の定理がモジュレーション空間 $M^{p,1}(R)$においても成り立つこと (すなわち、もし関数 $F : R^2 \to C$ が任意の $M^{p,1}(R)$の元 f= Re f + i Im f に対し， F(Re f, Im f) が $M^{p,1}(R)$の元になるならば、F は解析的な関数でなくてはならないこと)を証明した。しかし、彼らの論文やその後に発表された Bihimani によるウィーナーアマルガム空間と作用関数の研究にも述べられているように、この定理の逆が成り立つかどうかは研究開始当初未解決であった。$M^{p,q}_s(R)$と A(T)の関連性を調べるための足掛かりを掴むためにも、この問題をどうにか解決したいというのが当時の研究目標であった。

(2) G.B. Folland は 1989 年に正で対称な急減少関数を基本波束とする波束変換を用いた Sobolev 空間型の波面集合の特徴づけを行った。その論文の中で彼は基本波束が正で対称な急減少関数であることが必要であるかという問題を提示した。T. Okaji (Tsukuba J. Math (2001)) などこれまで様々な研究が行われてきたが、完全解決には至っていなかった。この問題に何らかの答えを出すのが第 2 の研究目標であった。

(3) シュレディンガー方程式やエアリー方程式を含むような高階の分散型方程式の解の性質をルベーグ空間 L^p の枠組みで研究する場合、まずこれらの方程式の解をフーリエ変換を用いて表示し（フーリエ乗子作用素で表す）、この表示と関数解析及び実解析的方法 (例えば、フーリエ乗子作用素の L^p-L^q 評価式や停留位相の方法など) を用いて解のもつ性質を解明する方法がある。モジュレーション空間の枠組みでこれらの方程式の解の性質を解明する場合にも、これまではフーリエ変換を用いた解の表示が用いられてきた。一方、加藤-小林-伊藤 (Tohoku Math. J. (2012)) において指摘されているように（少なくともシュレディンガー方程式の場合）解の性質をモジュレーション空間の枠組みで調べる場合にはフーリエ変換ではなく短時間フーリエ変換を用いた方が遥かに扱いやすい。しかし、エアリー方程式（や一般の高階の分散型方程式）に対して短時間フーリエ変換を用いた解の表示が可能かは明らかではなかった。この問題に何らかの答えを出すのが第 3 の研究目標であった。

３．研究の方法

(1) A. Bényi と T. Oh 氏によるモジュレーション空間を用いたブラウン運動の研究 (Adv. Math. (2011))で用いられている方法に動機づけられ、モジュレーション空間と相性のよい絶対収束するフーリエ級数をもつトーラス上の連続関数の空間 A(T)の研究で用いられる様々な方法をモジュレーション空間 $M^{p,1}(R)$の作用関数の特徴づけに応用した。

(2) 自由粒子のシュレディンガー方程式や 2 次のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の研究において、加藤-小林-伊藤 (Tohoku Math. J. (2012), J. Funct. Anal. (2014), RIMS Kokyuroku Bessatsu (2016))において用いられた方法 (空間変数だけではなく、時間変数を考慮した短時間フーリエ変換を用いる方法)をシュレディンガー方程式やエアリー方程式を含むような高階の分散型方程式の解の表示やその解のモジュレーション空間における評価の解明に応用した。

４．研究成果

上記課題に関して、以下の研究成果を収めた。

(1) 佐藤圓治氏(山形大学)と共同研究において、D. G. Bihimani氏とP. K. Ratnakumar氏によるモジュレーション空間におけるKatznelson型の定理の逆が成り立つかどうか明らかにした。より詳しく述べると、関数Fが実解析関数でありF(0)=0を満たせばFはモジュレーション空間$M^{p,1}(R)$上作用することが示せた。我々の方法はウィーナーアマルガム空間に対しても応用可能であることが分かった。

(2) 加藤圭一氏(東京理科大学)，伊藤真吾氏(北里大学)との共同研究において、G. B. Folland氏による問題を解決した。より詳しく述べると、基本波束が0でない急減少関数を基本波束とする波束変換でもSobolev空間型の波面集合の特徴づけることが可能であることが分かった。

(3) 加藤圭一氏、伊藤真吾氏、高橋直氏との共同研究において、シュレディンガー方程式やエアリー方程式を含むような高階の分散型方程式の解を短時間フーリエ変換を用いて表すことに成功した。この表示を用いて（L^p-理論を経由する従来の方法ではなく、短時間フーリエ変換を用いた直接的な方法により）モジュレーション空間の枠組みにおける高階の分散型方程式の解のストリッカーツ型評価式を得ることが出来た。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　3　件）

(1) M. Kobayashi, E. Sato, Operating functions on modulation and Wiener amalgam spaces. Nagoya Math. J. 230 (2018), 72-82. 査読あり

(2) K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Remark on characterization of wave front set by wave packet transform. Osaka J. Math. 54 (2017), no. 2, 209-228. 査読あり

(3) K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Estimates for Schrödinger operators on modulation spaces. Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations, 129-143, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B60, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2016. 査読あり

〔学会発表〕（計　4　件）

(1) M. Kobayashi, Representation of Airy evolution operator via short-time Fourier transform and its application, Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2017, 日本大学, 2017 年 8 月 3 日（招待講演）.

(2) M. Kobayashi, Representation of Airy evolution operator via Short-time Fourier transform, 第９回名古屋微分方程式研究集会, 名古屋大学, 2017 年 3 月 21 日（招待講演）.

(3) M. Kobayashi, Operating functions on modulation and Wiener amalgam spaces, Harmonic Analysis and its Applications in Beijing 2016, 中華人民共和国, 北京航空航天大学, 2016 年 9 月 29 日（招待講演）.

(4) M. Kobayashi, Operating functions on modulation and Wiener amalgam spaces, Harmonic Analysis and its Applications in Matsumoto 2016 summer, 信州大学, 2016 年 8 月 24 日（招待講演）.

〔図書〕（計　1　件）

(1) 相川弘明，小林政晴，ルベーグ積分要点と演習，共立出版，2018 年 9 月総ページ数 256.

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。