様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：１２６１３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2016～2017
課題番号：１６Ｋ１７６０９

研究課題名（和文）理論と数値解析による非双曲型力学系の研究

研究課題名（英文）Analysis of non-hyperbolic systems through theories and numerical analysis

研究代表者
篠原　克寿（Shinohara, Katsutoshi）

一橋大学・大学院商学研究科・准教授

研究者番号：５０７４０４２９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：１．一般に非双曲性があると系の周期点の個数の（周期に関する）増大度が大きくなると期待されるが，この事実が通有的に成立することを部分双曲型力学系と呼ばれるクラスの力学系の一部に対して証明した．２．非双曲性が摂動に対して頑強（ロバスト）に発生するための重要なメカニズムとしてブレンダーと呼ばれるものがあるが，具体的な二次多項式の族でブレンダーを持つものの極限集合の可視化の研究を行った．３．非双曲型力学系のうち，野生的と呼ばれるクラスの力学系の分岐に関して研究した．野生的力学系は例自体があまり知られていないが，体積双曲的と呼ばれるクラスの力学系が野性的になりうることを証明した．

研究成果の概要（英文）：1. In general, if non-hyperbolicity exists, it is expected that the increase of the number of periodic points of the system (with respect to the period) will be large. I proved this fact for a class of systems called partial hyperbolic dynamical system with some condition.2. A blender is an important mechanism for occurrence of non hyperbolic robustness against robustness (robustness). I investigated the visualization of the limiting set of systems having blenders which are given as quadratic polynomial maps.3. I studied the class of non-hyperbolic dynamical system called wild. I proved the existence of wild dynamical system among the class called volume hyperbolic systems.

研究分野：微分力学系

キーワード：非双曲型力学系　部分双曲型力学系　野生的力学系　周期点の増大度　ブレンダー

１．研究開始当初の背景

非双曲型力学系の代表的な例としてホモクリニック接触あるいは異次元へテロクリニックサイクルの分岐から生じるものが知られている．これらは単に純粋数学的に興味深いというだけではない．前者は乱流の機序との関係が，後者は化学反応やニューラルネットワークの数理モデルなどに現れる間歇性との関係が指摘され，これらの対象の数理科学的な観点からの深い理解を得るためには，非双曲型力学系の解析は極めて重要であると考えられる．

２．研究の目的

多様体の微分同相写像の反復合成により引き起こされる力学系のうち，非双曲型力学系と呼ばれるクラスのものの構造や性質を位相幾何学的手法・数値解析的手法を用いて研究する．

３．研究の方法

野生的力学系の解析をこれまでの研究で確立された flexible periodic points および partially hyperbolic filtrating Markov partition という概念を用いて行う．また，ブレンダーと呼ばれる構造の不変多様体を数値計算することにより，それを射影した構造がどれくらいの次元を持つのか数値計算により調べる．

４．研究成果

H28 年度は以下の 3 つの研究を遂行した．

(1)非双曲型力学系のうち，部分双曲型力学系と呼ばれるクラスがある．一般に非双曲性があると系の周期点の個数の（周期に関する）増大度が大きくなると期待される．この事実が通有的に成立することを中心方向の微分係数に関する符号条件を満たす部分双曲型力学系の族に対して成立する，ということの証明に関して研究を行った．本結果を証明するために必要な歪直積力学系に対する同様の結果が論文として公開された．この研究で重要な役割を果たすのが，一変数の多項式の集合の微分を取り，それらの合成を冪零リー環のレベルで考えるという観点である．3 次までのリー環では代数的な条件（アーベル性）により合成に関してある種の制限が発生するが，高い次数のリー環では非可換性により，都合のよい合成を取ることにより符号の問題が無くなる．この事実に着目することにより,2 次と 3 次の微分だけの仮定により，高い正則性（滑らかなカテゴリー）の下で周期点の超指数増大度を証明することができるようになった．

(2)非双曲型力学系のうち，部分双曲型力学系について，その非双曲性が摂動に対して頑強（ロバスト）に発生するための重要なメカニズムとしてブレンダーと呼ばれるものがある．ブレンダーそれ自身は力学系の再帰に関して一定の条件を課したものとして得られるが，その構造（極限集合がどう見えるか，など）の直感的理解はそれほどやさしくはない．研究代表者の過去の研究で，ブレンダーを持つ二次多項式系の例が得られているが，実際にコンピュータを用いてこの力学系を可視化するという研究を行った．この例は具体的な例の可視化として得られているので，系のパラメータを変化させることにより，ブレンダーがどのように生成・崩壊していくかが目で見えるようになり，このような知見は非双曲型力学系の研究の促進に重要な役割を果たすことが期待される．

(3)非双曲型力学系のうち，野生的と呼ばれるクラスの力学系の分岐に関してこれまで研究を行った．野生的力学系は例自体があまり知られていないが，体積双曲的と呼ばれるクラスの力学系が野性的になりうるという事実を，これまでに研究してきた摂動技術（flexible points と呼ばれる）を用いることで証明を与えた． この研究では中心方向が 2 次元の部分双曲型力学系で，分裂方向に体積要素を制限して得られる接空間の分解が（体積レベルで見て）双曲型になっているものを考察した．このような力学系は一様双曲型のものを考えると（体積のレベルでの振る舞いを考えることにより）局所的に完全な双曲構造を持ち，力学系が推移性を失うことは一般には起こらない．一方で，部分双曲型力学系の場合を考えると，中心方向の双曲性の次元が下がり，結果として低い次元の不変多様体が現れ，単純な次元の計算では推移性の有無に関して結論を得ることができない．このようなことが実際に起こることは，すでに知られていた摂動技術の応用により証明することは難しくはない．一方で，実際に不変多様体の次元が低くなったからといって，実際に位相推移性が消失するかどうかを決定するには，いくつかの問題を解決する必要がある．まず，力学系の大域的な情報を明示的な形で定式化すること，次にそれらの条件を実際に摂動により得ることができることを証明することである．この研究では鎖回帰集合の吸引領域に着目しこれらの条件の定式化を行った．より具体的には，吸引領域それ自体は相空間の開集合，あるいはその閉包として定式化されるが，この集合の境界が滑らかな構造（多様体構造）を持つ特殊な場合を考え，これらの多様体と部分双曲型構造との関連に着目し，推移性の有無の定式化を行った．partially hyperbolic filtrating Markov partition という名称をこの条件に与え，公理的に定式化した．これらの定式化の下で，推移性が消失するための摂動を行うためには部分双曲型方向の幾何学的-トポロジカルな条件を考察すればよいことが容易にわかるが，実際にそのような条件が成立する状況を構成できることを，この研究の前段

階の研究において開発した flexible periodic points の技術を用いて証明することに成功した.

H29 年度では以下の 3 つの研究を行った.

(1)野生的力学系の分岐理論について. 2017年3月に行った研究打ち合わせの結果をもとに, partially hyperbolic filtrating Markov partition と呼ばれるクラスの力学系の野生性を証明するのに必要な, 反復関数系に関する技術的な命題の証明の準備を進めた. H28 年度に証明を行った partially hyperbolic filtrating Markov partition による議論は, 位相推移性の有無を平面トポロジーの技術に帰着させる. この平面トポロジーの問題は力学系を定める写像を 2 次元方向に制限して得られる 2 次元反復関数系の問題として定式化される. より具体的には, partially hyperbolic filtrating Markov partition を持つ力学系が野生性を持つことを証明するための条件を, 上述の 2 次元反復関数系を用いた関数方程式として記述することができる. この研究では, 上述の反復関数系を明示的に定式化し, partially hyperbolic filtrating Markov partition がある場合にこの反復関数系への還元が実際どのようになっているかを調べ, 野生性のための十分条件を定式化した. 野生性を証明するには, 上述の結果として得られた関数方程式を解く必要があるが, 以前の研究で得られていた flexible periodic points という技術と, 無限次元位相線形空間の, ノルムに関する単位球が通常の位相に関してコンパクトでない, という事実に着目することにより, この関数方程式を解くことに成功した. この結果を用いると 2 次元に帰着できる場合に関しては野生性の証明が終わることとなる.

(2)非双曲型力学系の周期点の増大度について. 部分双曲型力学系と呼ばれる非双曲型力学系のクラスに対して, なめらかなカテゴリーにおいて周期点の増大度を通有的(generic)な観点から調べた. H28 年度に準備した反復関数系における関数の芽の合成に関する結果と, 部分双曲型力学系に関する正則性についての結果を組み合わせることにより, 中心方向に制限した２回微分および３回微分の符号に関する条件の下で, 上述の力学系が通有的には滑らかなカテゴリーにいて超指数増大度を持つことを証明した. また, これらの結果における中心方向の微分に関する過程が本質的に重要であること, すなわち, これらの仮定を満たさないような部分双曲型力学系であって通有的に超指数増大度を持たないような例を法双曲部分多様体の理論を用いることにより構成した. この構成の結果から, 例えば２回微分に関する位相に関しては通有的に超指数増大的になるが, ３回微分に関する位相に関してはそうならない例を構成することも可能であり, 力学系の性質を考える上で微分可能性の問題が本質的であるということが分かり, 大変興味深い. これらの結果は現在論文にまとめている.

(3)ブレンダーの数値計算と可視化. 非双曲型力学系を生成する重要なメカニズムのひとつであるブレンダーと呼ばれる構造に関して数値計算と可視化の観点から研究を進めた. 中心方向の双曲性が弱い系での不変多様体の計算, およびあるブレンダー発生を数値的にとらえる計算スキームの開発などを行い, すでに理論的にブレンダーの存在が知られている写像に対してその可視化を行った. またこの計算結果をもとに, パラメータを変更することにより, ブレンダーの存在領域を数値的に検出する方法や, これらの結果は論文としてまとめ, 現在専門誌に投稿中である. これらの研究成果の周知のために, アメリカと中国で開催された研究集会に参加した.

５. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計　3 件)

(1) S.Shinohara and K. Kobayashi, "Estimation of mean squared errors of non-binary A/D-encoders through Fredholm determinants of piecewise-linear transformations, "Nonlinear Theory and Its Applications, 9 巻 2,号 243-258, 2018 年. DOI: 10.1587/nolta.9.243　(査読有り)

(2) M. Asaoka, K. Shinohara, and D. Turaev, "Degenerate behavior in non-hyperbolic semigroup actions on the interval: fast growth of periodic points and universal dynamics" Mathematische Annalen, 2017, Volume 368, Issue 3-4, pp 1277--1309 DOI:10.1007/s00208-016-1468-0 (査読有り)

(3) C. Bonatti and K. Shinohara, "Volume hyperbolicity and wildness", Ergodic Theory and Dynamical Systems, published online, 2016, DOI:10.1017/etds.2016.51 (査読有り)

〔学会発表〕(計　3 件)

(1) K Shinohara, "Super exponential growth of number of periodic points for skew product maps," The workshop on Dynamical Systems, Peking University (2017 年 11 月)

(2) Stefanie Hittmeyer, K Shinohara,他２名, " The geometry of blenders in a three-dimensional Henon-like family" Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity 2017

(3) K Shinohara, “Volume hyperbolicity and wildness” Dynamics, Bifurcations, and Strange Attractors（2016 年 07 月 18 日） Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod.

６．研究組織

(1)研究代表者

篠原 克寿（SHINOHARA, Katsutoshi）

一橋大学・大学院商学研究科・准教授

研究者番号：50740429