

令和 3 年 7 月 12 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17613

研究課題名(和文) 完全WKB解析による団代数および位相的漸化式の研究

研究課題名(英文) Exact WKB analysis, cluster algebras and topological recursion

研究代表者

岩木 耕平 (Iwaki, Kohei)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：00750598

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：特異摂動型の微分方程式に対する完全WKB解析の理論の多様性に注目し、団代数や位相的漸化式との関係性に関して研究を行った。その中で、次の成果が得られた：(1) 位相的漸化式および離散Fourier変換によりPainleve 関数を構成した。(2) あるクラスのスペクトル曲線に対して、位相的漸化式が定める自由エネルギーを対応するBPS構造を用いて記述する公式を導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

微分方程式論の研究手法である完全WKB解析と、代数学の研究対象である団代数やBPS構造、さらには幾何学や数理解物理学と密接に関わる位相的漸化式との関係性に関する研究を行ったことで、全く異なる分野の知見を共有する足掛かりを与えることができた。これが本研究成果の学術的意義である。

研究成果の概要(英文)：We investigated a relationship between exact WKB analysis, cluster algebras, and topological recursion. The results we obtained are the following: (1) We proved that the discrete Fourier transform of topological recursion partition function gives a Painleve tau-function. (2) For a class spectral curves, we established a formula which allows us to describe the free energy of topological recursion in terms of the corresponding BPS structure.

研究分野：微分方程式論

キーワード：完全WKB解析 位相的漸化式 Painleve方程式 団代数 BPS構造

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

2014年に完全 WKB 解析とクラスター代数の関係性が研究代表者と中西知樹氏の研究で明らかにされ、さらなる関係性の探究が望まれていた。また、2012年頃から発展していた量子曲線の理論を通じて位相的漸化式と WKB 解析の関係性が活発に議論されていた。

2. 研究の目的

完全 WKB 解析と団代数、および位相的漸化式のより深い関係性を探ることが研究の目的であった。団代数に関しては、Voros 係数に対する Stokes 現象の解析を通じた団代数の構造の研究を行うことや、Bridgeland により見出された BPS 構造との関係を探ることが課題であり、一方の位相的漸化式に関しては完全 WKB 解析的な知見 (Stokes グラフ、Voros 係数など) を位相的漸化式の研究に応用することを主眼としていた。さらに、可能なら量子曲線の理論の枠組みの、Painleve 方程式のような可積分系への応用も目指していた。

3. 研究の方法

Voros 係数に対する Stokes 現象の解析には resurgence 理論における解析手法 (alien derivative など) などを用いる。Stokes グラフの構造を調べることで対応する BPS 構造を決定し、それに付随する BPS Riemann-Hilbert 問題の解と Voros 係数の Borel 和の比較を行う。また、Voros 係数を位相的漸化式の自由エネルギーを用いて記述する公式を導出し、それにより自由エネルギーの明示公式を探る。さらに、位相的漸化式による高種数のスペクトル曲線の量子化を通じて Painleve 方程式に付随した等モノドロミー線形方程式を解析する。

4. 研究成果

超幾何微分方程式、およびその合流から得られる微分方程式の Voros 係数における Stokes 現象を解析することで、その Stokes グラフから定まる (2 重) BPS 構造に付随した BPS Riemann-Hilbert 問題の解が Voros 係数の Borel 和により与えられることを示した。さらに、これら微分方程式の古典極限をスペクトル曲線とみなすことで位相的漸化式を適用し、得られた自由エネルギーの差分として Voros 係数が実現されることを示した (竹井優美子氏、小池達也氏との共同研究)。これにより、位相的漸化式の自由エネルギーを、BPS 構造を用いて明示的に記述する公式を導くことにも成功した (Omar Kidwai 氏との共同研究)。また、Axel Saenz 氏や Olivier Marchal 氏との共同研究などを通じて位相的漸化式の分配関数が Painleve 方程式のタウ函数を与えることを示し、さらに分配関数の離散 Fourier 変換として I 型 Painleve 方程式の一般解を与えるようなタウ函数の構成、およびそれによる楕円漸近展開の全次数への拡張などにも成功した。この成果は、共形場理論を巧みに用いて VI 型 Painleve 方程式の一般解を与えるようなタウ函数を構成した Gamayun-Iorgov-Lisovyy らの結果の位相的漸化式、または完全 WKB 解析的な類似を与えるものであり、この成果により位相的漸化式や WKB 解析と共形場理論との関係を探ることが将来取り組むべき課題に加えられた。このように、完全 WKB 解析の理論を軸として、研究テーマに掲げたいく

つかのキーワードを結びつける分野横断的な研究成果を得ることができた。また、当初の研究テーマに掲げてなかったが、resurgence 理論に基づく3次元多様体の量子不変量の研究にも取り組んだ（藤博之氏、村上斉氏、寺嶋郁二氏との共同研究）。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Iwaki Kohei, Koike Tatsuya, Takei Yumiko	4. 巻 4
2. 論文標題 Voros coefficients for the hypergeometric differential equations and Eynard-Orantin's topological recursion: Part II: For confluent family of hypergeometric equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Integrable Systems	6. 最初と最後の頁 xyz004
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/integr/xyz004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki, Masahide Manabe, Ikuo Satake	4. 巻 371
2. 論文標題 Reconstructing GKZ via Topological Recursion	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 839--920
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-019-03590-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kohei Iwaki	4. 巻 377
2. 論文標題 2-parameter tau-function for the first Painleve equation --Topological recursion and direct monodromy problem via exact WKB analysis--	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1047--1098
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hirose Minoru, Iwaki Kohei, Sato Nobuo, Tasaka Koji	4. 巻 195
2. 論文標題 Duality/sum formulas for iterated integrals and their application to multiple zeta values	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 72~83
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2018.05.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Iwaki Kohei, Marchal Olivier	4. 巻 18
2. 論文標題 Painleve 2 Equation with Arbitrary Monodromy Parameter, Topological Recursion and Determinantal Formulas	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 2581 ~ 2620
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-017-0576-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Iwaki K., Marchal O., Saenz A.	4. 巻 124
2. 論文標題 Painleve equations, topological type property and reconstruction by the topological recursion	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Geometry and Physics	6. 最初と最後の頁 16 ~ 54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.geomphys.2017.10.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takashi Aoki, Kohei Iwaki, Toshinori Takahashi	4. 巻 62
2. 論文標題 Exact WKB analysis of Schrodinger equations with a Stokes curve of loop type	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 1--34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kohei Iwaki	4. 巻 B61
2. 論文標題 Topological recursion, quantum curves and the second Painleve equation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 57--82
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計33件(うち招待講演 31件/うち国際学会 20件)

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis and related topics (5 talks)
3. 学会等名 Graduate Mini Course on Resurgence in Mathematics and Physics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion and Painleve I σ -function
3. 学会等名 IX Workshop on Geometric Correspondences of Gauge Theories (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Painleve σ -function and topological recursion
3. 学会等名 Moduli Spaces, Representation Theory and Quantization (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 Topological recursion and Painleve I σ -function
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 Painleve -関数と位相的漸化式
3. 学会等名 可積分系数理の深化と展開 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 位相的漸化式と第 I 型 Painleve 方程式の 函数
3. 学会等名 日本数学会 2019 年 度秋季総合分科会 (函数方程式論分科会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Toward a construction of 2-parameter family of Painleve tau-function via the topological recursion
3. 学会等名 D-modules, quantum geometry, and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 Exact WKB analysis and related topics I, II (2コマ)
3. 学会等名 ALReT2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 位相的漸化式と WKB 解析 1,2 (2コマ)
3. 学会等名 複素領域における微分方程式とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 完全 WKB 解析とその周辺
3. 学会等名 第 65 回幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 完全 WKB 解析と位相的漸化式
3. 学会等名 日本数学会無限可積分系セッション特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 2-parameter tau-function for the first Painleve equation via topological recursion
3. 学会等名 超幾何方程式研究会 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 完全WKB解析入門,完全WKB解析とクラスター代数 (2コマ)
3. 学会等名 第72回 ENCOUNTERwithMATHEMATICS (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 完全 WKB 解析と spectral networks 1, 2 (2 コマ)
3. 学会等名 モジュライ空間と双曲幾何の進展 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB Analysis and Cluster Algebras
3. 学会等名 Quantum groups, special functions and integrable systems, LMPT Tours, France, 17-19 May 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis and related topics (4 lectures)
3. 学会等名 School and International Conference on Geometry and Quantization (GEOQUANT 2017), Centre for Quantum Geometry of Moduli Spaces, University of Aarhus, Denmark, July 31, August 11, 2017. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis and Voros symbols
3. 学会等名 Higgs Bundles, Harmonic Maps, and Integrable Systems, Hannover, Germany, August 14, 18 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Stokes structure of equivariant CP1 and wall-crossing
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Symplectic Geometry at Crossroads, Kyoto University, September 25-26, 2017. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Stokes structure of equivariant CP1 and wall-crossing
3. 学会等名 Differential Geometry and Differential Equations: the influence of Mirror Symmetry and Physics, Waseda University, 11-15 December, 2017. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis for oscillatory integrals (2 lectures)
3. 学会等名 Winter School on Singularity and Mathematical Physics, Hotel Le Win, Jeonju, Korea, December 18-20, 2017. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion and Voros coefficients
3. 学会等名 International Symposium, RIKKYO MathPhys 2018, Rikkyo Univeristy, 12-14 March, 2018. (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis and spectral networks
3. 学会等名 String Theory Seminar (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis for Painleve equations and wall-crossing type structures
3. 学会等名 School - Wall-crossing and quiver varieties (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis, cluster algebras and Painleve equations,
3. 学会等名 String-Math 2016 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis, Painleve equations and the Stokes phenomenon
3. 学会等名 AMS von Neumann Symposium: Topological Recursion and its Influence in Analysis, Geometry, and Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 完全 WKB 解析とその応用 1, 2 (2 コマ)
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis vs spectral networks
3. 学会等名 New development of microlocal analysis and singular perturbation theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Resurgence, exact WKB and wall-crossing
3. 学会等名 Geometric Representation Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 岩木耕平
2. 発表標題 位相の漸化式と Painleve方程式
3. 学会等名 可積分系セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Stokes graphs for isomonodromy systems and classification of Painleve equations
3. 学会等名 Conformal Field theory, Isomonodromic tau-functions and Painleve equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Topological recursion, Painleve equations and cluster algebras
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis and related topics
3. 学会等名 Irregular Connections, Character Varieties and Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kohei Iwaki
2. 発表標題 Exact WKB analysis and related topics
3. 学会等名 The 2nd OCAMI-KOBE-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Integrable Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------