

令和元年6月19日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17619

研究課題名(和文)非有界な係数をもつ2階楕円型作用素の多角的研究

研究課題名(英文)Study of second order elliptic operators with unbounded coefficients

研究代表者

側島 基宏(SOBAJIMA, MOTOHIRO)

東京理科大学・理工学部数学科・講師

研究者番号：20760367

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：特殊な構造をもつ非有界な係数をもつ2階楕円型作用素の L_p 空間における半群の生成、熱核の構造および作用素のスペクトルを決定した。また、上記の視点を基に消散型波動方程式の重み付きエネルギー評価・拡散現象に対する結果を得た。さらに、半線形熱方程式・シュレディンガー方程式・消散型波動方程式に共通する保存量の構造を用いて小さな解の爆発現象を捉えるためのテスト関数法を改良した。尺度臨界の空間(時間)に依存する摩擦項をもつ半線形波動方程式に対するちいさな解の爆発を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非有界な係数をもつ2階楕円型作用素は様々な自然現象を記述する際に用いられる。この研究は、その現象がどのようなものであるかにかかわらず、記述された方程式の型のみから得られる普遍的な性質を読み解くことに用いることができる。この研究によって、特異性をもつ現象で今まで扱いきれなかった現象を解析できる可能性が高まったと考えている。

研究成果の概要(英文)：The generation of analytic semigroups, the structure of heat kernel, and the spectrum of second order elliptic operators with unbounded coefficients (with a special structure) in L_p -spaces are established. Also, weighted energy estimates and diffusion phenomena for wave equations with space-dependent damping term are discussed. Moreover, methods for proving blowup phenomena for semilinear heat equations, Schrödinger equations and damped wave equations are refined. The blowup phenomena for semilinear wave equations with scale-invariant space(time) dependent damping terms are also found.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：2階楕円型作用素 非有界な係数 半線形熱方程式 消散型波動方程式 テスト関数法

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

非有界な係数をもつ 2 階楕円型作用素は、主に西ヨーロッパで現在も盛んに研究されている。この 2 階楕円型作用素は物理学・化学・生物学に現れる数理モデルにおいて拡散・移流・増殖などによる影響を記述する際に用いられる基本的な偏微分作用素であり、それ自体の作用素論的研究は、対応する自然現象を理解する上で重要なテーマの一つである。多くの例が有界な係数をもつ楕円型作用素で記述されるが、非有界な係数をもつ作用素によって記述される自然現象も存在する。

係数がある場合の 2 階楕円型作用素の理論 (半群の生成理論・熱核の構造・最大正則性等) は非常によく整備されているが、非有界な係数をもつ場合には十分に整備されていないようである。このため、非有界な係数をもつ 2 階楕円型作用素に対する理論を整備する必要があると思われる。

2. 研究の目的

2 階楕円型作用素による L^p 空間における半群の生成およびその性質に対して係数の非有界性がもたらす影響を調べることを主眼にし、これをある程度多角的な視点から整理・整備することを目的とした。

3. 研究の方法

係数が局所的に非有界性 (特異性) をもつときに重点を置き、その特異性がもたらす (有界な係数では現れない) 影響を半群の生成理論・熱核の構造の面から考察した。この際に、研究協力者の Giorgio Metafuno 氏、Chiara Spina 氏と相互に訪問しあうことで議論を深めた。

また、作用素自体の性質を別の視点から観察するために、偏微分方程式の側面からの研究を並行して行った。この側面からの研究の協力者として、若杉勇太氏、池田正弘氏があり、特に変数係数の消散型波動方程式に現れる (非有界な係数をもつ) 楕円型作用素の振る舞いについて考察した。

4. 研究成果

本研究の研究成果は大きく 5 つの項目に分けられる。

<1>非有界な係数をもつ 2 階楕円型作用素のいくつかのモデルケース ($|x|^\alpha$ など) に対して解析的半群の生成・熱核の構造・スペクトル構造を Giorgio Metafuno 氏、Chiara Spina 氏との共同研究により解明した ()。この結果は、以前に行った共同研究 Metafuno-Okazawa-Sobajima-Spina[MOSS](2016) で得られていた L^p 空間における解析的半群の生成と作用素の特徴付けを基に、生成された半群に対する熱核の導出・評価を行うことによりほぼ最良の評価が得られている。ここで用いた手法は Beurling-Deny の方法、Davies の手法等既存の方法に基づいてはいるが、係数の特異性により若干の修正を必要とした。この熱核評価は、係数が特異性をもつ点付近と遠方で大きく熱核の挙動が異なる。特異性が熱核の構造に与える影響を捉えることができたと思われる。

<2>非有界な係数をもつ 2 階楕円型作用素で、解析的半群を生成しないものの例として $+|x|^\alpha$ (repulsive Hamiltonian) がよく知られているが、その性質がはっきりとわかっているのは L^2 空間のみであり、 L^p 空間でどのような構造が現れるかは自明ではない。この点について、研究協力者の吉井健太郎氏との共同研究により 1 次元 L^p 空間における摂動付き repulsive Hamiltonian のスペクトル構造を解析した ()。これにより、 L^p 空間において半群を生成しない作用素に対する作用素論的な手法を構築するための足掛かりが得られたと思っている。

<3>本研究の視点を用いた変数係数の消散型波動方程式に対する研究として、研究協力者の若杉勇太氏との共同研究を行った。ここでは、消散型波動方程式 $u_{tt} - u + a(x)u_t = 0$ に対する解の漸近系に焦点を当てた。Wakasugi [W] (2014) の手法を踏襲する形で研究をスタートし、重み付きエネルギー評価を通して解の漸近系を導いた ()。この方程式の解は放物型方程式 $a(x)u_t = u$ の解に漸近するが、この方程式の解析に非有界な係数をもつ 2 階楕円型作用素 ($1/a(x)$) が現れ、この作用素の解析が必須になり、<1>の研究で得られた知見をこの部分に活用した。また、その後の研究によって $a(x)$ の条件をより弱めることに成功した ()。さらに、重み付きエネルギー評価自体の構造を再考し、重み関数に多項式的に減衰する放物型方程式の解 (パラメータ付き自己相似解) を用いることによって、消散型波動方程式の初期値に関する制限を大幅に緩和することに成功した ()。これにより、作用素論的な考察を消散型波動方程式に加えられたこと、および重み付きエネルギー評価の原理の一端を捉えられたことの 2 点がこの研究の新規性であると考えている。

<4>消散型波動方程式の非線形問題に対してもある一定の成果を得た。研究協力者の池田正弘氏と、時間に依存する尺度臨界摩擦項をもつ半線形波動方程式 $u_{tt} - u + (a/(1+t))u_t = |u|^p$ の爆発問題を扱った。この問題は、本来想定していた非有界な係数をもつ作用素との接点はあまり見受けられないが、波動方程式の主要項 $u_{tt} - u$ はミンコフスキー空間上の典型的な2階楕円型作用素であるので、長期的に本研究の本流に係ってくると思われる。この共同研究は、Zhou-Han[ZH](2014)による $a=0$ の手法が基になっており、波動方程式の自己相似な特殊解が重要な役割を果たしている。この構造に基づき、我々はより一般的な設定の下に同方程式の特殊解を構成し、その挙動を調べることによって半線形波動方程式の小さな初期値に対する解の爆発を証明した()。空間に依存する尺度臨界摩擦項の場合 $u_{tt} - u + (a/|x|)u_t = |u|^p$ にも類似した特殊解の構造があり、それをを用いることで解の爆発を証明した()。ここで得られた結果は、この方程式の小さい初期値に対する爆発の結果として最良であると予想している。

<5>半線形の熱方程式・シュレディンガー方程式・消散型波動方程式に共通する方程式の保存量を用いた解の爆発の証明法として、Pokhozhaev-Mitidieri[PM](2001)にテスト関数法が導入されている。しかしながら、PMの方法では(非線形項の指数が)臨界の場合の精密な解の評価が得られないことが分かっている。本研究では、パラメータを変数にもつ常微分不等式を導入することで臨界問題に対しても精密な解の評価を導出できるような枠組みを構築した()。このコンセプトを基にして2次元の外部問題で臨界の場合を考察し、今まで知られていなかった臨界問題の小さな初期値に対する解の爆発現象を発見した()。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 11 件)

M.Ikeda, M.Sobajima, “Life-span of blowup solutions to semilinear wave equation with space-dependent critical damping”, FUNKCIALAJ EKVACIOJ, 印刷中.

M.Sobajima, Y.Wakasugi, “Weighted energy estimates for wave equation with space-dependent damping term for slowly decaying initial data”, Communications in Contemporary Mathematics, 印刷中. DOI: 10.1142/S0219199718500359

M.Ikeda, M.Sobajima, “Sharp upper bound for lifespan of solutions to some critical semilinear parabolic, dispersive and hyperbolic equations via a test function method”, Nonlinear Analysis 182 (2019), 57-74. DOI: 10.1016/j.na.2018.12.009

M.Ikeda, M.Sobajima, “Remark on upper bound for lifespan of solutions to semilinear evolution equations in a two-dimensional exterior domain”, Journal of Mathematical Analysis and Applications 470 (2019), 318-326. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.10.004

G.Metafune, M.Sobajima, C.Spina, “Elliptic and parabolic problems for a class of operators with discontinuous coefficients”, Annali Della Scuola Normale Superiore Di Pisa-Classe Di Scienze Vol. XIX, issue 2 (2019), 601-654. DOI: 10.2422/2036-2145.201605_002

M.Sobajima, K.Yoshii, “ S^1 -analysis of one-dimensional repulsive Hamiltonian with a class of perturbations”, AIMS Mathematics 3 (2018), 21-34. DOI: 10.3934/Math.2018.1.21

M.Sobajima, Y.Wakasugi, “Diffusion phenomena for the wave equation with space-dependent damping term growing at infinity”, Advances in Differential Equations 23 (2018), 581-614. <https://projecteuclid.org/euclid.ade/1526004067>

M.Ikeda, M.Sobajima, “Life-span of solutions to semilinear wave equation with time-dependent critical damping for specially localized initial data”, Mathematische Annalen 372 (2018), 1017-1040. DOI: 10.1007/s00208-018-1664-1

G.Metafune, M.Sobajima, C.Spina, “Kernel estimates for elliptic operators with second-order discontinuous coefficients”, Journal of Evolution Equations 17 (2017), 485-522. DOI:10.1007/s00028-016-0355-1

M.Sobajima, Y.Wakasugi, “Remarks on an elliptic problem arising in weighted energy estimates for wave equations with space-dependent damping term in an exterior domain”, AIMS Mathematics 2 (2017), 1-15. DOI:10.3934/Math.2017.1.1

M.Sobajima, Y.Wakasugi, “Diffusion phenomena for the wave equation with space-dependent damping in an exterior domain”, Journal of Differential Equations 261 (2016), 5690-5718. DOI:10.1016/j.jde.2016.08.006

[学会発表](計 29 件)

M.Sobajima, “Blow up solutions of semilinear heat equation”, Seminario (University of Salento) (招待講演), 2018年

- M.Sobajima, "Test function method for blowup of solutions to semilinear evolution equations in sectorial domain", RIMS 共同研究 (公開型) 「非線形発展方程式を基盤とする現象解析に向けた数学理論の展開」(招待講演), 2018 年
- M.Sobajima, "Sharp lifespan estimates for solutions to two-dimensional semilinear heat equation in exterior domains", 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会 関数方程式論分科会, 2018 年
- M.Ikeda, M.Sobajima, "On a test function method for blowup of solutions to semilinear damped wave equations", 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会 関数方程式論分科会, 2018 年
- M.Sobajima, "スケール臨界の摩擦項をもつ非線形波動方程式の解の爆発について", 第 26 回さいたま数理解析セミナー(招待講演), 2018 年
- M.Sobajima, "Analytic semigroups generated by scale invariant elliptic operators and related inequalities II", RIMS 共同研究(グループ型)「スペクトル解析におけるスケール不変構造と摂動論の新展開」(招待講演), 2018 年
- M.Sobajima, "Analytic semigroups generated by scale invariant elliptic operators and related inequalities I", RIMS 共同研究(グループ型)「スペクトル解析におけるスケール不変構造と摂動論の新展開」(招待講演), 2018 年
- M.Sobajima, "On lifespan for two dimensional semilinear heat equation in exterior domain", International Workshop on "Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics" (招待講演)(国際学会), 2018 年
- M.Sobajima, "2次元外部領域における半線形熱方程式の解の爆発について", 第 167 回愛媛大学解析セミナー(招待講演), 2018 年
- M.Ikeda, M.Sobajima, "スケール臨界な時間変数に依存した係数を摩擦項に持つ波動方程式の解の最大存在時刻について", 日本数学会 2018 年度年会 関数方程式論分科会, 2018 年
- M.Ikeda, M.Sobajima, "Life-span of blowup solutions to semilinear wave equation with space dependent critical damping", 日本数学会 2018 年度年会 関数方程式論分科会, 2018 年
- M.Sobajima, "On lifespan estimate for solutions of a semilinear damped wave equation via a test function method", Critical exponent and nonlinear evolution equations 2018 (招待講演), 2018 年
- M.Ikeda, M.Sobajima, "Blowup phenomena for semilinear wave equation with space-dependent singular damping", 第 43 回発展方程式研究会, 2017 年
- M.Sobajima, "空間変数に依存するスケール臨界な摩擦項をもつ非線形波動方程式の解の爆発について", 大阪大学 微分方程式セミナー(招待講演), 2017 年
- M.Sobajima, "Diffusion phenomena for wave equation with space-dependent damping term", Seminario (University of Salento)(招待講演), 2017 年
- M.Sobajima, "On L^p -theory for second order elliptic operators with unbounded diffusion coefficients", Global properties in potential theory of continuous and discrete spaces (招待講演), 2017 年
- M.Sobajima, Y.Wakasugi, "Weighted energy estimates for wave equation with space-dependent damping term for slowly decaying initial data", 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会 関数方程式論分科会, 2017 年
- M.Sobajima, Y.Wakasugi, "Diffusion phenomena for the wave equation with space-dependent damping term growing at infinity", 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会 関数方程式論分科会, 2017 年
- M.Sobajima, "Weighted energy estimates for damped wave equation with slowly decaying initial data", 第 8 回 拡散と移流の数理解析(招待講演), 2017 年
- M.Sobajima, "空間に依存する摩擦を伴う波動方程式に対するエネルギー評価について", 第 56 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム(招待講演), 2017 年
- 21 M.Sobajima, "Weighted energy estimates for wave equation with space-dependent damping term growing at infinity", Equadiff 2017 (国際学会), 2017 年
- 22 M.Sobajima, "空間遠方で増大する摩擦項を伴う波動方程式のエネルギー評価について", 第 81 回埼玉大学解析ゼミ(招待講演), 2017 年
- 23 M.Sobajima, "Diffusion phenomena for the wave equation with space-dependent unbounded damping term", 5th Italian-Japanese Workshop "Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's" (招待講演)(国際学会), 2017 年
- 24 M.Sobajima, Y.Wakasugi, "Diffusion phenomena for the wave equation with space-dependent damping in an exterior domain", 日本数学会 2017 年度年会 関数方程式論分科会, 2017 年
- 25 M.Sobajima, G.Metafune, C.Spina, " $|x|^\alpha$ を主要項にもつ楕円型作用素が生成する解析半群の積分核評価", 日本数学会 2017 年度年会 関数方程式論分科会, 2017 年
- 26 M.Sobajima, " $|x|^\alpha$ を主要項にもつ楕円型作用素が生成する解析半群の積分核評価について", 神楽坂解析セミナー(招待講演), 2016 年
- 27 M.Sobajima, "Kernel estimates for semigroups generated by $|x|^\alpha$ with lower order terms", 応用解析研究会(招待講演), 2016 年
- 28 K.Yoshii, M.Sobajima, "An embedding estimate for the repulsive Hamiltonian in L^p ", 日本数学会 2016 年度秋季総合分科会 実函数論分科会, 2016 年
- 29 M.Sobajima, "Diffusion phenomena for the wave equation with space-dependent damping in an exterior domain", The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (招待講演)(国際学会), 2016 年

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：Giorgio Metafune, Chiara Spina, 若杉勇太, 池田正弘, 吉井健太郎

ローマ字氏名:Giorgio Metafune, Chiara Spina, Yuta Wakasugi, Masahiro Ikeda, Kentarou Yoshi

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。