

令和 3 年 5 月 27 日現在

機関番号：32665

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17620

研究課題名(和文) 不規則媒質から乱歩へ波及する揺らぎ

研究課題名(英文) Fluctuation spreading from random environments to random walks

研究代表者

久保田 直樹 (KUBOTA, Naoki)

日本大学・理工学部・助教

研究者番号：20754972

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：自然界に存在する媒質は複雑かつ不規則な構造を持つことが多く、「不規則媒質中の乱歩」はその中における粒子の運動を記述する数理モデルの1つである。本研究ではこの不規則媒質中の乱歩を題材とし、「媒質の構造の不規則性がその中を運動する粒子の挙動にどのような影響を与えるのか？」について解析を行った。その結果、不規則性の度合(例えば、スポンジのような媒質における空洞のできやすさ)に近い2つの媒質を比較したとき、それらの中を運動する粒子の拡散度合も近くなることがわかった。この成果を得る過程においては、いくつかの関連モデルの研究が必要となったが、それらにおいても粒子の挙動に関する新たな性質を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

不規則な構造を持つ媒質中における粒子の挙動は、数学的・物理的に未解明な部分が多い。特に、粒子の拡散度合を特徴付ける性質についてはほとんど何もわかっていない。この未知の領域に対して、「不規則性の状態に近い媒質においては粒子の拡散度合も近くなる」という連続性の問題を本研究では解決することに成功した。また、不規則媒質中の乱歩の挙動は感染症の拡大やインターネット上の情報拡散にも深く関連していることから、これらの現実的な拡散現象の問題にも、本研究結果や解析手法の応用が期待できる。さらに、様々な数理モデルを関連付け研究を行ったため、本研究は実社会における幅広い拡散現象の解析にも役立つと思われる。

研究成果の概要(英文)：Media that exist in the natural world often have complex and random structure, and “random walks in random environments” are one of the mathematical models describing particles moving in such media. In this research, we treated the above model and studied how the randomness for the structure of the media affects the behavior of the random walk. As a result, we obtained that the diffusivities for two different media are very close if their strengths of randomness are very similar (for instance, the ease of forming cavities in a sponge). To obtain this result, we investigated several related models and got new properties for the behaviors of those models.

研究分野：確率論

キーワード：不規則媒質中の乱歩 ファーストパッセージパーコレーション フロッグモデル 大偏差原理 レート関数 連続性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

古くから、“モノ”の拡散現象は数理科学において興味深い対象の1つである。特に近年、交通網の発達やインターネットの普及によりモノの拡散現象は多様化しており、その解析はますます重要になってきている。ただ、不純物などの障害物の影響によって、実社会における多くの媒質の構造は不均質かつ不規則になっている。このような状況において、「媒質からの影響を考慮した粒子の運動」を記述する数理モデルの1つとして「不規則媒質中の乱歩」がある。上記のような社会的背景と数学的・物理的興味から、不規則媒質中の乱歩は近年積極的に研究されてきた。しかし、拡散現象の基本的指数である「粒子の拡散度合」の性質については、現在においても未解明な部分が多い。そこで、不規則媒質中の乱歩における拡散度合を解析することは、数学的・物理的興味だけでなく、実社会への応用という観点からも極めて重要であると考えた。

2. 研究の目的

不規則媒質中の乱歩においては、「リアプノフ指数」や「大偏差原理におけるレート関数」が粒子の拡散度合を特徴付けている。ゆえに、本研究ではこれら2つの量に対して、新たな性質を導出することを目的とした。また、これらの量の解析を通して、関連する数理モデルに対して新たな性質を見出すことも同時に目指した：

(1) 不規則媒質中の乱歩の一種である「パーコレーションクラスターの乱歩」に対して、リアプノフ指数およびレート関数を解析することを主たる目的とした。この数理モデルは「正方格子の上にランダムに無数の穴が開いていて、粒子は穴の開いていない隣接点の中から等確率で1つを選び移動していく(穴の中は通過できない)」というものである。特に、「穴の開く確率が十分近い2状態においては、それぞれにおけるリアプノフ指数およびレート関数も近い値をとりうるかどうか？」という連続性に関する問題の解決を目指した。

(2) 不規則媒質中の乱歩のリアプノフ指数に関連する量として、ファーストパッセージパーコレーションやフロッグモデルにおける「時間定数」と呼ばれる量がある。そこで、先行研究を踏まえこの時間定数をより精密に解析し、その過程で得られた手法や結果をリアプノフ指数の解析に応用することを目指した。また逆に、リアプノフ指数の解析で得られた手法を、ファーストパッセージパーコレーションやフロッグモデルに応用し、それらの数理モデルにおいても新たな現象を捉えることを目的とした。

(3) 上記(1)と(2)の研究を推進するにあたり、その他の関連モデルに対する研究が必要となった場合には、本研究の観点に立って考察を行い、それらにおいても新たな現象を観測することを目指した。

3. 研究の方法

リアプノフ指数とレート関数、およびそれらに関連する量に対して、パーコレーションおよび乱歩の挙動解析の視点を生かして研究を進めた：

(1) パーコレーションクラスター上の乱歩におけるリアプノフ指数は、「パーコレーションにおけるグラフ距離」および「ファーストパッセージパーコレーションにおける時間定数」の2つの量と近い構造をしている。このグラフ距離と時間定数における連続性はGaret等(2007, 2017)において研究されていた。そこで重要となっている点は、「穴の形状が一致している領域の割合」と「穴の形状が異なっている部分の迂回路」の解析である。パーコレーションクラスター上の乱歩に対しても、上記2つの問題点が解決されれば、リアプノフ指数の連続性を得られるであろうとある程度予想できていた。ただ、パーコレーションクラスター上の乱歩は最初に挙げた2つの数理モデルとは異なり、たとえ空間的構造が近かったとしても、乱歩自身のランダム性の制御という問題が発生すると容易に想像できた。また、空間的構造が大きく異なる部分を乱歩に無理やり迂回させようとすると、非常に大きな確率的誤差が生じてしまうという問題も発生した。そこで、この2つの問題点に焦点を当て、リアプノフ指数の連続性の研究に取り組んだ。

(2) Kubota (2012)により、パーコレーションクラスター上の乱歩におけるレート関数は、リアプノフ指数を用いて記述されることが知られていた。したがって、リアプノフ指数の連続性からレート関数の連続性もただちに従うと予想していた。しかし、レート関数の連続性を得るためには、極限操作に関するある種の順序交換が可能かどうかという問題を解決する必要性が生じた。そこで、レート関数の連続性に関しては、この極限操作の順序交換に焦点を当て研究を進めた。

(3) ランダムな待ち時間を持つ不規則媒質中の乱歩、過去の履歴から影響を受ける乱歩、フロッグモデルなどの数理モデルにも視野を広げ、本研究に関連する問題にも取り組んだ。これにより、

本研究の総合的な推進に努めるだけでなく、その成果を様々な数理モデルに応用する方法も積極的模索した。

4. 研究成果

(1) パーコレーションクラスター上の乱歩におけるリアプノフ指数・レート関数は、正方向格子に穴が開く確率に依存する量である。そこで、その穴の開く確率に関するパーコレーションクラスターの変化とその上を運動する乱歩の挙動を詳しく調べ、穴の開く確率についての連続性をリアプノフ指数とレート関数の両方に対して証明することに成功した。この成果は1件の原著論文として出版された。ただ、極限操作の順序交換に関する技術的問題により、レート関数の定義域の境界上においては連続性を証明することができなかった。また、リアプノフ指数・レート関数における一様連続性やリプシッツ連続性など、より強い連続性について考察することも課題として残った。

(2) パーコレーションクラスター上の乱歩のリアプノフ指数に関連する量として、フロッグモデルにおける時間定数の連続性を研究した。フロッグモデルは、正方向格子にランダムにばら撒かれた粒子がそれぞれ独立に正方向格子を運動し、それらが接触することで情報伝達を行っていくという数理モデルである。このフロッグモデルにおける情報伝達の速さ(時間定数)は近年、Alves等(2001, 2002)によって研究されてきたが、その詳しい性質については未解明な部分が多かった。そこで、上記(1)の研究に関連して、「粒子のばら撒き方が近い2つの状況において、それらの時間定数も近くなるのか?」という連続性の問題に取り組んだ。その結果、粒子のばら撒き方が近い場合、粒子の配置や挙動が限りなく近い状態になっている領域が多く存在することがわかり、これにより時間定数の連続性を証明することに成功した。さらに、各格子点に配置する粒子の個数が非常に多い場合には、時間定数の連続性が成り立たない例があることも発見した。この成果は1件の原著論文として出版された。

(3) フロッグモデルに関する上記(2)の研究を遂行するにあたって、ある点まで情報伝達が行われる時間の大幅な評価が必要となった。大まかな評価に関してはAlves等(2001, 2002)によって得られていたが、それを時間定数付近の評価へと精密化することに成功した。さらに、Garet-Marchand(2010)によるパーコレーションのグラフ距離に関する研究を応用することで、フロッグモデルにおける情報伝達の速さに対する集中不等式を得ることができた。これにより、情報伝達の速さとその期待値との誤差に関して、先行研究より詳細な情報を引き出すことができた。

(4) パーコレーションクラスター上の乱歩における上記(2)の研究に関連して、ランダムな待ち時間を持つ1次元不規則媒質中の乱歩に対する減速評価の研究を行った。ランダムな待ち時間を持つ不規則媒質中の乱歩は、各格子点における粒子の滞在時間がランダムになっている不規則媒質中の乱歩のことである。この数理モデルの大偏差原理(典型的な挙動からのズレの評価)は、Dembo等(2004)やFukushima-Kubota(2014)によって近年研究されてきた。ランダムな待ち時間が非常に大きくなりやすい場合、通常の不規則媒質中の乱歩に比べて、粒子が進みづらくなることが予想される。そこで、この問題を1次元の場合において考察し、実際に粒子が進みづらくなる確率が通常の不規則媒質中の乱歩より高いことを証明した。この成果は1件の原著論文として出版された。この現象は多次元正方向格子においても同様に起こりうる。ただ、(1次元特有の構造に由来する)技術的な問題により、その予想を多次元において検証することは現時点では困難であった。

(5) パーコレーションクラスター上の乱歩における上記(2)の研究に関連して、象ウォークと呼ばれる過去の履歴から影響を受ける乱歩の漸近挙動に関する研究を行った。この数理モデルはSchütz-Trimper(2004)によって導入され近年積極的に研究されてきたが、その極限定理に関しては未解明な部分が多い。そこで、この象ウォークに関する中心極限定理について考察し、「過去の履歴から受ける影響の強さ」が象ウォークの挙動にどのような変化を与えるかについて研究を行った。この成果は1件の原著論文として出版された。

<引用文献>

O. S. M. Alves, F. P. Machado, S. Y. Popov, K. Ravishankar, The shape theorem for the frog model with random initial configuration, *Markov Processes and Related Fields*, vol. 7(4), 2001, pp. 525-539

O. S. M. Alves, F. P. Machado, S. Y. Popov, The shape theorem for the frog model, *The Annals of Applied Probability*, vol. 12(2), 2002, pp. 533-546

A. Dembo, N. Gantert, O. Zeitouni, Large deviations for random walk in random environment with holding times, *The Annals of Probability*, vol. 32(1B), 2004, pp. 996-1029

R. Fukushima, N. Kubota, Quenched large deviations for multidimensional random walk in random environment with holding times. *Journal of Theoretical Probability*, vol.

27(4), 2014, pp. 1140-1166

O. Garet, R. Marchand, Large deviations for the chemical distance in supercritical Bernoulli percolation, *The Annals of Probability*, vol. 35(3), 2007, pp. 833-866

O. Garet, R. Marchand, Moderate deviations for the chemical distance in Bernoulli percolation, *Alea*, vol. 7, 2010, pp. 171-191

O. Garet, R. Marchand, E. B. Procaccia, M. Th  ret, Continuity of the time and isoperimetric constants in supercritical percolation. *Electronic Journal of Probability*, vol. 22(78), 2017, pp. 1-35

N. Kubota, Large deviations for simple random walk on supercritical percolation clusters, *Kodai Mathematical Journal*, vol. 35(3), 2012, pp. 560-575

G. M. Schütz, S. Trimper, Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk. *Physical Review E*, vol. 70(4), 2004

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Naoki Kubota, Masato Takei	4. 巻 177
2. 論文標題 Gaussian Fluctuation for Superdiffusive Elephant Random Walks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 1157 ~ 1171
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10955-019-02414-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Naoki Kubota	4. 巻 33
2. 論文標題 Continuity for the Rate Function of the Simple Random Walk on Supercritical Percolation Clusters	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 1948 ~ 1973
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-019-00936-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Amir Dembo, Ryoki Fukushima, Naoki Kubota	4. 巻 23
2. 論文標題 Slowdown estimates for one-dimensional random walks in random environment with holding times	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Electronic Communications in Probability	6. 最初と最後の頁 1 ~ 12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/18-ECP191	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Naoki Kubota	4. 巻 51
2. 論文標題 Deviation bounds for the first passage time in the frog model	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances in Applied Probability	6. 最初と最後の頁 184 ~ 208
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kubota Naoki	4. 巻 130
2. 論文標題 Continuity for the asymptotic shape in the frog model with random initial configurations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Stochastic Processes and their Applications	6. 最初と最後の頁 5709 ~ 5734
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spa.2020.04.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Naoki Kubota
2. 発表標題 Continuity of the rate function for the simple random walk on percolation clusters
3. 学会等名 Japan Netherlands workshop "Probabilistic methods in statistical mechanics of random media" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久保田直樹
2. 発表標題 Continuity for the asymptotic shape in the frog model with random initial configurations
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Kubota
2. 発表標題 Continuity for the asymptotic shape in the frog model with random initial configurations
3. 学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久保田直樹
2. 発表標題 フロッグモデルにおける漸近形状の連続性について
3. 学会等名 大阪大学確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久保田直樹
2. 発表標題 フロッグモデルにおける粒子の拡散について
3. 学会等名 霧島確率論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Naoki Kubota
2. 発表標題 Continuity result for the rate function of the simple random walk on supercritical percolation clusters
3. 学会等名 17th International symposium "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems"（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 久保田直樹
2. 発表標題 Continuity for the rate function of the simple random walk on supercritical percolation clusters
3. 学会等名 無限粒子系、確率場の諸問題XIV
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久保田直樹
2. 発表標題 Continuity result for the rate function of the simple random walk on supercritical percolation clusters
3. 学会等名 福岡大学確率論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Kubota
2. 発表標題 Continuity results for the frog model in random initial configurations
3. 学会等名 One-day Workshop on Asymptotic and Potential Analysis of Stochastic Processes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Naoki Kubota
2. 発表標題 Upper tail estimates for the first passage time in the frog model
3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Naoki Kubota
2. 発表標題 Tail estimates for the first passage time in the frog model
3. 学会等名 16th International symposium "Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Naoki Kubota
2. 発表標題 Concentration inequalities for the simple random walk in unbounded nonnegative potentials
3. 学会等名 Workshop on percolation, spin glasses and random media (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 久保田直樹
2. 発表標題 不規則媒質中の乱歩に対する大偏差原理とリアプノフ指数
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会 (統計数学分科会特別講演) (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 久保田直樹
2. 発表標題 フロッグモデルにおける情報伝達速度の末尾評価
3. 学会等名 平成28年度 (第60回) 日本大学理工学部学術講演会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 久保田直樹
2. 発表標題 Upper tail estimates for the first passage time in the frog model
3. 学会等名 無限粒子系、確率場の諸問題XII
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Naoki KUBOTA's website
<https://sites.google.com/view/kubota-naoki08/home>
日本大学研究者情報
<http://kenkyu-web.cin.nihon-u.ac.jp/Profiles/119/0011833/profile.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	アミール デンボ (DEMBO Amir)		
研究協力者	福島 竜輝 (FUKUSHIMA Ryoki)		
研究協力者	竹居 正登 (TAKEI Masato)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
米国	Stanford University		