

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 7 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17622

研究課題名(和文)ジャンクションを含む平均曲率流の弱解の構成と一意性の解析

研究課題名(英文) Analysis on existence and uniqueness of weak solution for mean curvature flow including junction

研究代表者

高棹 圭介 (TAKASAO, Keisuke)

京都大学・理学研究科・特定准教授

研究者番号：50734472

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：平均曲率流方程式は、金属の焼きなましにおける金属粒界の運動を表す方程式である。平均曲率流方程式の弱解の時間大域存在は知られているが、境界条件や外力項等がある場合は、解の存在証明は困難となる。本研究では、適当な仮定の下では動的境界条件付きのAllen-Cahn方程式の解が動的境界条件付きの平均曲率流方程式の時間大域的な弱解に収束することや、外力項付きAllen-Cahn方程式を用いてソボレフクラスに属する正則性の低い外力項付き平均曲率流方程式の弱解の時間大域存在を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、境界条件や外力項を課した場合における、Allen-Cahn方程式と平均曲率流方程式との関係性を明らかにした。従来の外力項付きAllen-Cahn方程式では証明に必要な評価を得ることが出来なかったが、適切な補正項を加えることにより、それを解決した。この補正項を加える方法は他の方程式への応用も期待できる。また、弱解の構成で用いたフェイズフィールド法は数値計算にも用いられる手法であり、本研究で得られた結果は実学への応用も期待できる。

研究成果の概要(英文)：The mean curvature flow equation is an equation to describe the motion of metal grain boundaries in the annealing process. The existence of a time-global existence of the weak solution for the mean curvature flow equation is known, but when there are boundary condition or forcing term, it is difficult to prove the existence of the solution. In this work, we showed that the solutions for Allen-Cahn equation with dynamic boundary condition converges to a time-global weak solution for the mean curvature flow equation with dynamic boundary condition, under suitable assumptions. We also proved the existence of time-global weak solutions for the mean curvature flow equation with forcing term belonging to the Sobolev class, using the Allen-Cahn equation with forcing term.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：平均曲率流 幾何学的測度論 フェイズフィールド法 特異極限問題 変分問題 バリフォールド 弱解 Allen-Cahn方程式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究で主に考察する偏微分方程式である平均曲率流方程式は、金属結晶内部の金属粒の境界(結晶粒界)が焼きなましによって動く現象を記述しており、曲面の法速度がその平均曲率で与えられるという方程式である。平均曲率流方程式は、一般的な偏微分方程式の議論を用いることにより、適切な仮定の下では一定時間までは解の存在の証明ができるものの、一般的な条件下では時間大域解の存在の証明は極めて困難である。その主な理由として、解である曲面の形状が時間発展により大きく変化しうることが挙げられる。また、通常の放物型偏微分方程式では初期値が滑らかであればその解も滑らかであることが期待されることが多いが、平均曲率流方程式の場合は初期値が滑らかな曲面であったとしても、ある時刻で特異点が発生しうること理由として挙げられる。特異点を含む形状としてはトリプルジャンクション(図1)と呼ばれる3つの曲線が1点で交わる形状がよく知られており、正則性等未解明な部分も多く極めて興味深い数学的研究対象である。トリプルジャンクションが初期値の場合、時間大域的な弱解を求める方法は Brakke(1978)、Kim-Tonegawa(2017)による幾何学的測度論と時間に対する離散化を用いた手法しか知られていなかった。それに対し、フェイズフィールド法とよばれる手法でトリプルジャンクション等の特異点を含む弱解の存在について構成できないかと考えたのが、本研究の動機である。

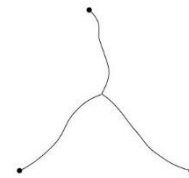


図1

(2) 弱解の存在を示す方法としてフェイズフィールド法を選んだ理由としては以下が挙げられる。通常、2相の平均曲率流方程式をフェイズフィールド法で近似する場合、Allen-Cahn 方程式と呼ばれる以下の半線形放物型方程式を用いる。

$$u_t^\varepsilon = \Delta u^\varepsilon - \frac{W'(u^\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

ここで、 Δ はラプラシアン、 $W(s) = (1-s^2)^2/2$ 、 $\varepsilon > 0$ は十分小さい正の定数である。この方程式は偏微分方程式の中では比較的扱いやすい種類の方程式であり、通常の偏微分方程式の理論を応用しやすい。また、数値計算とも相性がよく、実学への応用も見込める。

2. 研究の目的

(1) 本研究の主な目的は、フェイズフィールド法等を用いたトリプルジャンクション等の特異点を持つ平均曲率流方程式の弱解の構成である。

(2) また、平均曲率流方程式の弱解の一意性に関しては未解明である。本研究のもう一つの目的は、フェイズフィールド法で得られる解の一意性に関して明らかにすることである。

3. 研究の方法

(1) 前述の Allen-Cahn 方程式では2相の平均曲率流方程式を近似できるが、トリプルジャンクションを含む曲面は3相(図1のように、領域を3つに分ける状態)である為、Allen-Cahn 方程式の連立方程式である Ginzburg-Landau 方程式を用いてトリプルジャンクションを含む平均曲率流方程式の弱解の構成を検討した。しかし、平均曲率流方程式の解の構成に必要な評価である単調性公式が、Ginzburg-Landau 方程式に対して成り立つか否かは現在も未解決であり、直接この方法で解の存在を示すのは困難であることが判明した。よって、トリプルジャンクションを持つ平均曲率流方程式の弱解の存在証明への第一歩として、トリプルジャンクションの特異点を境界条件としてみなすことにより、ディリクレ境界条件、動的境界条件等の境界条件を課した2相の平均曲率流方程式の弱解の存在を、フェイズフィールド法を用いて示すことを目標の一つとした。

(2) 外力項付き平均曲率流方程式は、水溶液内の結晶成長の方程式としても知られている。物理現象としては金属の焼きなましとは異なるものの、その数学的性質を解明すれば平均曲率流方程式の解の構造をより深く理解できる。さらに前述の Ginzburg-Landau 方程式は、外力項付き Allen-Cahn 方程式の連立方程式としても考えることが出来る為、外力項付き平均曲率流方程式の弱解の構成を行うことにより、トリプルジャンクションを持つ平均曲率流方程式の弱解の存在を示すことが出来るのではないかと考えた。特に、既存の結果(Mugnai-Roeger(2011))では、外力項が連続関数の場合にしかその弱解の存在は知られていなかった為、本研究ではより正則性の低い外力項に対しても弱解の存在が得られるか調査した。

4. 研究成果

(1) ディリクレ境界条件、もしくは動的境界条件を課した平均曲率流方程式に関して、フェイズフィールド法と幾何学的測度論を用いた解析を行った。研究代表者は、研究協力者の儀我美一氏、尾上文彦氏とともに、以下の結果を得た。これらの結果は現在投稿準備中である。

① 本研究では、弱解としては Brakke による幾何学的測度論を用いた弱解を考えた。理由として

は、幾何学的測度論を用いる方法ではトリプルジャンクション等の特異点を含む曲面も弱解として扱うことが出来ることが挙げられる。しかし、Brakke の弱解は、先行研究ではノイマン境界条件の場合にしか定義されておらず、ディリクレ境界条件、動的境界条件の場合には未定義であった。それに対し本研究では、フェイズフィールド法の特異極限を形式的に考察することにより、それらの境界条件を課した場合の平均曲率流方程式に対する適当な弱解の定義を与えた。特に、動的境界条件を課した Allen-Cahn 方程式の特異極限が満たすべき境界条件は、今までの予想に反するものであり、形式的な計算ではあるもののインパクトのあるものであった。

② 境界条件の有無に関わらず、フェイズフィールド法による平均曲率流方程式の近似を数学的に正当化するためには、Allen-Cahn 方程式のディリクレエネルギーとポテンシャルエネルギーが $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときの極限において一致する必要がある。領域が全空間の場合(境界条件がない場合)、またはノイマン境界条件の場合には、単調性公式と呼ばれる評価を用いてそのエネルギーの一致を示すことが出来るものの、ディリクレ境界条件、動的境界条件の場合には、領域の境界付近において単調性公式が成り立つかどうかは現在も未解決である。それに対し本研究では、領域の境界でディリクレエネルギーとポテンシャルエネルギーが一致するという仮定の下で、①で定義した弱解に収束するという結果を得た。今後の課題としては、境界上に課した上記の仮定の除去が考えられるが、初期値のディリクレエネルギーがポテンシャルエネルギー以下になる場合、任意の時刻でその関係が保存されることも本研究で明らかにした為、この評価を用いて解決できるのではないかと考えている。

(2) 正則性の低い外力項付きの平均曲率流方程式について、以下の結果を得た。尚、本結果は査読付き論文雑誌(Communications on Pure and Applied Analysis)に掲載済みである。

① 適切なソボレフ空間において、放物型スケール変換の意味で外力項が劣臨界となる場合の弱解の時間大域存在を得た。既存の結果では、外力項が連続であることを仮定していたので、大幅な改良であるといえる。

② (1)でも述べたように、弱解の構成の為にはディリクレエネルギーとポテンシャルエネルギーの極限での一致の証明が鍵となっている。その証明には最大値原理と呼ばれる放物型偏微分方程式の持つ極めて重要な性質を用いるが、外力項がある場合その評価が悪くなるという問題があった。それに対し本研究では、外力項に適切な補正項を組み込むことによってその困難を解消した。また、外力項の近似である g^ε は近似パラメータである ε に対して $\max_{x,t} |\nabla g^\varepsilon(x,t)| \leq \varepsilon^{-\gamma}$ ($0 < \gamma < \frac{1}{2}$) となるように取ることが出来ること (g^ε 自体の大きさには制限がない) も本結果の特徴の一つである。この補正項を用いる方法は、他の方程式にも応用出来る為、今後は別の方程式の弱解の存在証明に生かせるのではないかと考えている。

(3) 平均曲率流方程式は、本来は金属の焼きなましにおける金属粒界の運動方程式であるが、本来は考慮すべき金属結晶の異方性等は無視されている。それに対し、研究協力者の水野将司氏とともに、Epshteyn-Liu-Mizuno によって提唱された、金属結晶の焼きなましにおける粒界の運動方程式を考察し、以下の結果を得た。この結果は論文にまとめ現在投稿中である。

① このモデル方程式は、平均曲率流方程式に結晶の方位差による影響を加えた、平均曲率流方程式と常微分方程式による連立方程式である。本研究では結晶粒界がグラフとみなせる場合において、古典解の時間大域存在、一意性、及び漸近挙動を示した。

② その証明の鍵として、このモデル方程式に対する重み付き単調性公式の存在を示したことが挙げられる。重みとしてグラフの高さ関数の1階微分を代入することにより、グラフの勾配の各点評価を得ることが出来た。

(4) 平均曲率流方程式のフェイズフィールド法で用いられる制約条件付き Allen-Cahn 方程式について、研究協力者の山崎教昭氏、鈴木友之氏と、数値計算に関する解の安定性に関して議論を行い、陽解法における数値計算が安定となる空間刻み幅と時間刻み幅の条件を得た。本結果で考察した制約条件付き Allen-Cahn 方程式とは、通常の Allen-Cahn 方程式に対して解の大きさが1以下になるように制約を加えたものである。この結果は査読付き論文雑誌(AIMS Mathematics)に掲載済みである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 M. Mizuno, K. Takasao	4. 巻 24
2. 論文標題 Gradient estimates for mean curvature flow with Neumann boundary conditions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinear Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1007/s00030-017-0457-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 K. Takasao	4. 巻 22
2. 論文標題 Convergence of the Allen-Cahn equation with constraint to Brakke's mean curvature flow	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Advances in Differential Equations	6. 最初と最後の頁 765-792
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 K. Takasao	4. 巻 66
2. 論文標題 Existence of weak solution for volume preserving mean curvature flow via phase field method	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 2015-2035
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 T. Suzuki, K. Takasao, and N. Yamazaki	4. 巻 1
2. 論文標題 New approximate method for the Allen-Cahn equation with double-obstacle constraint and stability criteria for numerical simulations	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 AIMS Mathematics	6. 最初と最後の頁 288-317
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/Math.2016.3.288	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 K. Takasao	4. 巻 19
2. 論文標題 Existence of weak solution for mean curvature flow with transport term and forcing term	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications on Pure and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 2655-2677
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2020116	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Takasao	4. 巻 B80
2. 論文標題 Global existence and monotonicity formula for volume preserving mean curvature flow	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 81-94
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 19件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 高棹圭介、水野将司
2. 発表標題 結晶方位差を考慮した結晶粒界の発展方程式の解の存在について
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会(金沢大学)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Existence of weak solution for mean curvature flow with forcing term
3. 学会等名 Kanazawa workshop: Gradient flows and related topics: analysis and applications(金沢市) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Phase field method for mean curvature flow with dynamic boundary condition
3. 学会等名 Viscosity solution approach to asymptotic problems in front propagation, dynamical system and related topics(京都大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 動的境界条件付き平均曲率流方程式に対するフェイズフィールド法
3. 学会等名 表面・界面ダイナミクスの数理17(東京大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Existence of weak solution for mean curvature flow with forcing term
3. 学会等名 Oberseminar Analysis in Dortmund(TU Dortmund University) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 外力項付き平均曲率流の弱解の存在について
3. 学会等名 熊本大学応用解析セミナー(熊本大学) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 外力項付き平均曲率流方程式に対するフェイズフィールド法
3. 学会等名 東北大学応用数理解析セミナー(東北大学)(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 New phase field method for mean curvature flow with transport term
3. 学会等名 Stochastic and Multiscale Modeling and Computation Seminar (Illinois Institute of Technology)(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 フェイズフィールド法による平均曲率流の弱解の存在について
3. 学会等名 談話会(京都大学)(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Convergence of Landau-Lifshitz equation to multi-phase mean curvature flow
3. 学会等名 大阪大学 微分方程式セミナー(大阪大学)(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Phase field method for mean curvature flow with dynamic boundary condition
3. 学会等名 研究集会「数学と現象: Mathematics and Phenomena in Miyazaki 2018」(宮崎大学)(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Keisuke Takasao
2. 発表標題 Global existence of weak solution for volume preserving mean curvature flow via phase field method
3. 学会等名 2018 CMS Winter Meeting(カナダ、バンクーバー)(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Rectifiability of varifolds in the singular limit of Allen-Cahn equation with non-local term
3. 学会等名 研究集会「第13回 非線型の諸問題」(鹿児島市)(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Remarks on convergence of vector-valued Allen-Cahn equation to multi-phase mean curvature flow
3. 学会等名 松山解析セミナー 2018(愛媛大学)(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 体積保存平均曲率流の弱解の存在と単調性公式について
3. 学会等名 日本数学会2017 年度年会(首都大学東京)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Takasao
2. 発表標題 Global existence of weak solution for volume preserving mean curvature flow via phase field method
3. 学会等名 Geometric Analysis Seminar(Massachusetts Institute of Technology) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 K. Takasao
2. 発表標題 Global existence of weak solutions for volume preserving mean curvature flow
3. 学会等名 Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations-China-Japan Joint Project for Young Mathematicians 2016(East China Normal University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 Global existence of weak solution for volume preserving mean curvature flow via phase field method
3. 学会等名 偏微分方程式セミナー(北海道大学) (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 高棹圭介
2. 発表標題 体積保存平均曲率流の弱解の存在及び単調性公式について
3. 学会等名 部分多様体幾何とリー群作用2016(東京理科大学) (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 K. Takasao
2. 発表標題 Phase field method for mean curvature flow with transport term
3. 学会等名 Shokaku Mathematical Lecture Series by Professor Lawrence C. Evans + Nonlinear PDE satellite Workshop(東北大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 K. Takasao
2. 発表標題 Global existence and monotonicity formula for volume preserving mean curvature flow
3. 学会等名 RIMS研究集会 保存則と保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性, 特異性および長時間挙動の研究(京都大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	儀我 美一 (GIGA Yoshikazu)	東京大学・大学院数理科学研究科・教授 (12601)	

6. 研究組織(つづき)

	氏名 (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	山崎 教昭 (YAMAZAKI Noriaki)	神奈川大学・工学部・教授 (32702)	
研究協力者	鈴木 友之 (SUZUKI Tomoyuki)	神奈川大学・工学部・准教授 (32702)	
研究協力者	水野 将司 (MIZUNO Masashi)	日本大学・理工学部・准教授 (32665)	
研究協力者	尾上 文彦 (ONOUE Fumihiko)	東京大学・大学院数理科学研究科 (12601)	Scuola Normale Superioreにも所属。