

令和 2 年 7 月 2 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17624

研究課題名（和文）非線形波動方程式における幾何学的対称性と解の特異性の解析

研究課題名（英文）Research on geometric symmetry and singularity of solutions for nonlinear wave equations

研究代表者

岡本 葵 (Okamoto, Mamoru)

信州大学・学術研究院工学系・助教

研究者番号：40735148

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：Dirac-Klein-Gordon方程式系の初期値問題が適切性となる初期値のSobolev指数を完全に決定した。また、短パルス方程式や5階修正KdV型方程式などで、初期値問題の解に非線形項の影響が表れる修正散乱を示した。さらに、多項式ではない非線形項を持つ非線形Schrodinger方程式において、初期値を確率化した問題を考えた。エネルギー臨界な非線形項において、エネルギークラスよりも広いクラスにおいてほとんど確実に時間大域的な解が得られることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非適切性の証明では、非線形項を逐次近似して、滑らかな解の存在を示し、それをを用いて、ノルムインフレーションを証明した。また、波束テスト法を用いた解の漸近挙動の解明は、高階KdV型方程式にも適用できることを示した。さらに、初期値を確率化することで、決定論的な反例が除外されることを示した。本研究で培ったこれらの手法は、より広範な方程式に援用することができるものと考えられ、今後の研究がさらに発展する基盤になると期待している。

研究成果の概要（英文）：We completely determine the range of Sobolev regularity of initial data to be well-posed of the Cauchy problem for the Dirac-Klein-Gordon system. We also show that the modified scattering for the solution to the Cauchy problem for the short-pulse, fifth order KdV-type, and higher order KdV-type equations. We study the Cauchy problem for the nonlinear Schrodinger equation with nonalgebraic nonlinearity in five and six dimensions. We prove that almost sure global well-posedness holds for the Cauchy problem in a larger class than the energy space for the energy-critical nonlinear Schrodinger equation.

研究分野：関数方程式論

キーワード：非線形波動方程式

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式は様々な物理現象のモデルとして表れる。特に、非線形波動方程式は様々な波動現象を記述するモデルであるが、その非線形性のために、統一的な解析が困難であり、解の存在でさえも非自明な場合が多い。そのため、初期値問題の適切性は、方程式の解析において基本的でかつ重要な問題となる。また、正則性の低い空間では、非線形項の特徴が顕著に表れ、個々の方程式の性質を捉えやすくなる。また、物理的に自然なクラスであっても非線形項の影響が大きく、解の存在等の証明が困難な方程式もある。そのため、現状で取り扱える方程式や非線形性の制御手法を確立することにより、より複雑な方程式や非線形項の解析に発展させる必要がある。

低い正則性における適切性の解析は、Bourgain や Klainerman-Mackledon により導入された Fourier 制限ノルム法により飛躍的に進歩した。Fourier 制限ノルム法では、線形項のある種の平滑化効果が活用できると共に、個々の非線形項の影響を丁寧に観察することで、非線形性を制御することができる。また、Christodoulou や Klainerman により、波動方程式に対しては、零形式と呼ばれる特殊な非線形項が考察されている。これらの非線形項では、特異性が強く表れる部分が相殺され、強い非線形相互作用が消えることが確認されている。

2. 研究の目的

個々の非線形項の特徴を反映した評価式は、方程式や非線形項が持つ対称性を反映したものであることが多い。本研究では、非線形波動方程式において、その幾何学的対称性を用いて、どのような状況で解の特異性が発生するかを解明することを目指す。特に、方程式が持つ構造を解析に取り入れることで、強い非線形性が消し去れるかどうかを調べ、低い正則性における適切性の解明を行う。

正則性が低い空間における初期値問題の適切性が成り立つかどうかは、非線形項の形状にも依存する。そのため、一般的な議論は適用できず、個々の非線形項を丁寧に観察する必要がある。また、強い相互作用が発生する場合には、より広い空間における適切性が得られないような状況も起こる。このような場合、技術的な困難さによるものではなく、実際に初期値問題が非適切になるような場合もある。そこで、適切性と非適切の両方向から問題を解析し、得られた結果が最良のものであるかどうかを調べる。さらに、このような研究で得られた成果を、非線形相互作用と解の特異性発生との関係に着目して整理し、様々な非線形効果を制御する技術の確立を目指す。

3. 研究の方法

非線形波動方程式の初期値問題の適切性を考察することで、どのような非線形項を制御することができるかについて考える。線形項の平滑化を利用すると共に、非線形項の構造を丹念に観察して、非線形相互作用による振動を取り出して、解析にうまく取り入れることで平滑化効果を活用する。いわゆる Fourier 制限ノルムでは、時間に関して Sobolev 空間を考えることで、振動効果を時間に関する微分に置き換える評価を用いている。より精密な評価が必要となるような問題では、そのような平滑効果を最大限活用するために、時間に関する Sobolev 空間を、2 乗有界変動関数空間に取り換えるなどの工夫を行う。また、決定論的には、反例が一つでもあれば、議論が破綻するが、確率的な効果を取り入れることで、そのような例は測度 0 の集合に属し、ほとんど確実に、適切性などが成立する場合もある。そこで、初期値の確率化を行い、適切性などの考察も行う。

4. 研究成果

(1) Dirac-Klein-Gordon 方程式系の初期値問題が適切となる初期値の Sobolev 空間を完全に分類した。Machihara-Nakanishi-Tsugawa(2010)により、逐次近似法を用いる限りでは、初期値問題が適切となる Sobolev 指数が得られていた。しかし、逐次近似法に依らない方法では、適切性が得られる可能性が残されていた。本研究では、Machihara-Nakanishi-Tsugawa で得られた適切性が成り立つ Sobolev 指数が、実際に初期値問題が適切となる最良のものであることを証明した。また、単に初期値問題が非適切となるだけでなく、小さな初期値から少しでも時間が経つと対応する解が非常に大きくなるノルムインフレーションと呼ばれる現象が起こることを証明した。

(2) (1)で研究した非適切性を証明する技法を、一般化 Boussinesq 方程式や Kawahara 方程式に応用し、これらの初期値問題に対してもノルムインフレーションが発生することを証明した。その際、ある初期値の解でノルムインフレーションが発生するような場合、正則性が低い空間に属する任意の初期値に対する解でもノルムインフレーションが発生するような条件を発見した。このような条件は、様々な方程式に対して確かめることができ、2 次の非線形項を持つ非線形 Schrodinger 方程式などにおけるすべての初期値に対する解のノルムインフレーションが発生することを示した。

(3) ポテンシャルを持つ Dirac 方程式において、ある種の平滑化作用を表す Strichartz 評価式と呼ばれる評価式を証明した。ポテンシャルが零固有値を持たず、磁場ポテンシャルが小さい場合、角度成分の正則性を課すことにより、Strichartz 評価式が得られることを示した。特に、

擬スカラーポテンシャルには小ささを仮定しておらず、ポテンシャル自体としては大きなものも含む。さらに、この結果を用いて、非線形 Dirac 方程式を考え、初期値のカイラル成分が小さければ、初期値が大きくても、解が時間大域的に存在することを示した。さらに、解は自由解に漸近するという散乱が得られることを証明した。

(4) 短パルス方程式、5 階 KdV 型方程式、高階 KdV 型方程式の初期値問題において、解の漸近挙動の解明を行った。これらの方程式において、線形項による時間減衰と非線形項との影響が釣り合う散乱の意味で臨界な非線形項を考察した。波束テスト法を用いることで、初期値問題の解の減衰が悪くなる部分を抜き出し、解の漸近挙動が線形解の挙動とは異なるいわゆる修正散乱を証明した。

(5) 消散型波動方程式における L^p - L^q 型評価を証明した。この評価式は、消散型波動方程式における解析の基礎となるものであり、今回示した不等式を利用して、臨界な非線形項を持つ非線形消散型波動方程式の初期値問題について、時間大域的な可解性が得られることを示した。なお、初期値が L^1 に属する場合は、有限時間爆発する解の存在が知られているが、本研究では、 L^r ($r > 1$) に属する初期値では時間大域的に存在することを証明した。さらに、テスト関数法を用いて、非線形項の指数が臨界指数よりも大きな場合の解の存在時刻の評価を与えた。

(6) 多項式ではないような非線形項を持つ非線形 Schrodinger 方程式において、初期値を確率化した問題を考えた。空間 5, 6 次元において、エネルギー臨界な非線形項を持つ場合、エネルギークラスよりも広い初期値に対して、ほとんど確実に時間大域的な可解性が得られることを証明した。ここで、決定論的な場合には、Ikeda-Inui (2015) により、エネルギークラスよりも広いクラスに属する初期値では、初期値問題の解が存在しないという意味での非適切が示されていた。初期値を確率化することにより、そのような反例を排除することができた。

(7) 2 次の非線形項を持つ半線形 KdV 型方程式の初期値問題の適切性を示した。非線形項の次数が 3 以上の場合には、逐次近似法により初期値問題の適切性が示されているが、次数が 2 で、微分を 2 つ以上含む場合には、逐次近似法では適切性が得られないことが示されていた。本研究では、初期値の原始関数が有界という条件を課すことで、ゲージ変換を用いて初期値問題の適切性が得られることを証明した。ゲージ変換により微分がまとめてかかるような非線形項を取り除くことができ、逐次近似法で初期値問題が適切となるようなモデルに帰着させることができることを発見した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計13件（うち査読付論文 13件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 11件）

1. 著者名 Okamoto Mamoru	4. 巻 8
2. 論文標題 Asymptotic behavior of solutions to a higher-order KdV-type equation with critical nonlinearity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Evolution Equations & Control Theory	6. 最初と最後の頁 567 ~ 601
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/eect.2019027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hiroyuki Hirayama, Shinya Kinoshita, Mamoru Okamoto	4. 巻 -
2. 論文標題 Well-posedness for KdV-type equations with quadratic nonlinearity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Evol. Equ.,	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-019-00540-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Machihara Shuji, Okamoto Mamoru	4. 巻 192
2. 論文標題 Sharp ill-posedness of the Dirac-Klein-Gordon system in one dimension	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 11pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2019.111687	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Okamoto Mamoru, Uriya Kota	4. 巻 -
2. 論文標題 Final state problem for the nonlocal nonlinear Schrodinger equation with dissipative nonlinearity	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Equations & Applications	6. 最初と最後の頁 481 ~ 494
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7153/dea-2019-11-23	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tadahiro Oh, Mamoru Okamoto	4. 巻 -
2. 論文標題 On the stochastic nonlinear Schrodinger equations at critical regularities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Stoc PDE: Analysis and Computations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40072-019-00163-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Mamoru Okamoto	4. 巻 23
2. 論文標題 Long-time behavior of solutions to the fifth-order modified KdV-type equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Adv. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 751 ~ 792
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Ikeda Masahiro, Inui Takahisa, Okamoto Mamoru, Wakasugi Yuta	4. 巻 18
2. 論文標題 L^p - L^q estimates for the damped wave equation and the critical exponent for the nonlinear problem with slowly decaying data	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications on Pure & Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 1967 ~ 2008
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2019090	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Oh Tadahiro, Okamoto Mamoru, Pocovnicu Oana	4. 巻 39
2. 論文標題 On the probabilistic well-posedness of the nonlinear Schrodinger equations with non-algebraic nonlinearities	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems - A	6. 最初と最後の頁 3479 ~ 3520
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2019144	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Okamoto Mamoru	4. 巻 24
2. 論文標題 Large time asymptotics of solutions to the short-pulse equation	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.	6. 最初と最後の頁 24 pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00030-017-0464-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 D'Ancona Piero, Okamoto Mamoru	4. 巻 456
2. 論文標題 On the cubic Dirac equation with potential and the Lochak-Majorana condition	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 1203 ~ 1237
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2017.07.055	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Shuji Machihara and Mamoru Okamoto	4. 巻 13
2. 論文標題 Remarks on ill-posedness for the Dirac-Klein-Gordon system	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Dyn. Partial Differ. Equ.	6. 最初と最後の頁 179-190
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.4310/DPDE.2016.v13.n3.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shuji Machihara and Mamoru Okamoto	4. 巻 3
2. 論文標題 Well-posedness for the dimension-reduced Chern-Simons-Dirac system	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Evolution Equations	6. 最初と最後の頁 1031-1048
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00028-016-0371-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Okamoto Mamoru	4. 巻 157
2. 論文標題 Norm inflation for the generalized Boussinesq and Kawahara equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 44 ~ 61
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2017.03.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計24件 (うち招待講演 15件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 On the energy critical nonlinear Schrodinger equations with randomized initial data
3. 学会等名 Stochastic partial differential equations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 Random data Cauchy problem for the energy-critical nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 The 11th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 Random data Cauchy problem for the energy-critical nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 空間1次元Dirac-Klein-Gordon 方程式系の初期値問題の非適切性
3. 学会等名 One-day workshop on nonlinear dispersive equations in Osaka (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 平山浩之、木下真也、岡本葵
2. 発表標題 球対称な初期値に対する非線形シュレディンガー方程式系の適切性について
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岡本葵、町原秀二
2. 発表標題 空間1次元Dirack-Klein-Gordon方程式系の初期値問題の非適切性
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to a higher-order KdV-type equation with critical nonlinearity
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the short-pulse equation
3. 学会等名 The 5th East Asian Conference in Harmonic Analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 Random data Cauchy problem for the energy critical nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 Large time asymptotics of solutions to the short-pulse equation
3. 学会等名 The 15th Linear and Nonlinear Waves (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 Long-time behavior of solutions to the fifth-order mKdV-type equation
3. 学会等名 名古屋微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 Long-time behavior of solutions to the fifth-order mKdV-type equation
3. 学会等名 NLPDEセミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the short-pulse equation
3. 学会等名 第658回応用解析研究 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 確率化された初期値をもつエネルギー臨界非線形Schrodinger方程式の初期値問題の可解性
3. 学会等名 第3回 大分大学 解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 Random data Cauchy problem for the energy critical nonlinear Schrodinger equation
3. 学会等名 第7回調和解析中央大セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the short-pulse equation
3. 学会等名 Analysis Seminar (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡本葵、Tadahiro Oh、Oana Pocovnicu
2. 発表標題 確率化された初期値をもつエネルギー-臨界非線形Schrodinger方程式の初期値問題の可解性
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 分数階非線形Schrodinger方程式の初期値問題の非適切性
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 池田正弘、若杉勇太、戌亥隆恭、岡本葵
2. 発表標題 線形消散型波動方程式の解の時間減衰評価, 可積分でない初期値を持つ非線形問題の臨界指数
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Mamoru Okamoto
2. 発表標題 Random data Cauchy problem for the energy critical nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 Nonlinear Dispersive Equations in Kumamoto (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 Random data Cauchy problem for the energy critical nonlinear Schrodinger equations
3. 学会等名 第5回 神楽坂非線形波動研究会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岡本葵
2. 発表標題 空間1次元Dirac-Klein-Gordon方程式系の非適切について
3. 学会等名 RIMS共同研究「線形及び非線形分散型方程式に関する最近の進展」
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 岡本葵, 町原秀二
2. 発表標題 次元縮約されたChern-Simons-Dirac方程式の初期値問題の適切性及び非適切性
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 岡本 葵
2. 発表標題 Asymptotic behavior of solutions to the short-pulse equation
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----