

機関番号：14601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17627

研究課題名(和文)点渦系に関連する楕円型方程式の研究

研究課題名(英文)Study on some elliptic equations related to the systems of point vortices

研究代表者

高橋 亮 (TAKAHASHI, Ryo)

奈良教育大学・数学教育講座・准教授

研究者番号：30583249

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、2次元における渦形成メカニズムを解明するために提唱された多強度の点渦乱流平均場方程式の解の性質を研究することを主目的とする。本研究によって主に次に述べる2つの結果が得られた。

1つ目は、確率分布系に従う多強度点渦乱流平均場方程式の爆発解析の基盤を確立したことである。2つ目は、円板領域における確率分布系に従う2正強度点渦乱流平均場方程式に対して、トゥルディンガー=モーザー型不等式の最良定数が、解の存在性・非存在性を分かつと考えられた逆温度に関するパラメータの閾値と一致しないことを示したことである。この性質は当初予想されていなかった結果である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

過去においては単強度の平均場方程式が活発に研究されてきたが、多強度の平均場方程式の研究はあまりなされていなかった。本研究では、多強度の平均場方程式の爆発解析の基盤を確立したことから、当該研究の関連分野の数学解析の出発点を打ち立てたといえよう。また、単強度の平均場方程式に対して、トゥルディンガー=モーザー型不等式の最良定数が解の存在性とならがあることが知られているが、多強度の平均場方程式に対してこの性質は一般には成立しないことが示された。このことによって、種々の平均場方程式の解構造の類似点・相違点が徐々に浮き彫りになり、2次元における渦形成メカニズムの理解が深められることが期待される。

研究成果の概要(英文)：The main aim of this study is to analyse properties of solutions of the mean field equations related to the systems of point vortices in two dimension. In this study, the two mathematical results denoted below are mainly obtained.

At first, a fundamental of the blow-up analysis is established to the mean field equation under the stochastic assumption that the vortex intensities and orientations are independent identically distributed random variables with probability distribution. Second, it is shown that the best constant of the Trudinger-Moser inequality does not equal to the threshold value determining if or not there exists a solution for the mean field equation above with two positive intensities in a disk. This property was unexpected at the beginning of this study.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：点渦乱流 平均場方程式 確率分布系 決定分布系 爆発解析 解の存在性 解の一意性 閾値

1. 研究開始当初の背景

木星で観測される渦、台風や海上で観測される渦などの渦形成メカニズムを解明するために、オンサーガーは点渦系の平衡統計力学理論の基盤を築いた(Onsager 1949)。その後、リオンらは、渦強度・渦の向きが一定という仮定の下、点渦系平均場方程式(以下、単純モデル)を数学的に厳密に導出した(Caglioti-Lions-Marchioro-Pulvirenti 1992 & 1995)。単純モデルの解構造は、長崎-鈴木(Nagasaki-Suzuki 1990)に端を発し、多くの国内外の数学者によって研究され、そこから様々な数学的アイデア・手法が生み出されてきた。しかし、渦形成メカニズムを解明する立場においては、上記の渦強度・渦の向きが一定という仮定は現実味に欠ける。そこで、より一般的かつ現実的な仮定の下、確率分布系に従う点渦系平均場方程式(以下、確率論的モデル)(Neri 2004)、決定分布系に従う点渦系平均場方程式(以下、決定論的モデル)(Eyink-Sreenivasan 2006 & Sawada-Suzuki 2008)が提唱された。これら2つのモデルの数学解析は2006年頃から始まり、国内外の数学者の関心を引き寄せ始めている。しかし、単純モデルと比較すると、確率論的モデルおよび決定論的モデルに対する数学解析は進展していないという状況であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、確率論的モデルおよび決定論的モデルの解構造を調べることである。特に、これら2つのモデルと単純モデルの解構造の類似点・相違点を抽出することを主目的とする。3つすべてのモデルの数学解析について、爆発解析が出発点となるため、まずは、未完成である確率論的モデルに対する基礎的な爆発解析を完成させる。次に、確率論的モデルおよび決定論的モデルに対して、爆発解の構成、爆発解の一樣評価、質量量子化、解の存在性、解の一意性等について研究を行い、解構造の探求を進める。

3. 研究の方法

まず、確率論的モデルに対する爆発解析に関して、これは単純モデルと性質が類似していると考えられるため、過去の研究によって開発された手法を駆使して解決に臨む。次に、前節2で述べた解構造を研究するために、領域、3つのパラメータ(逆温度・点渦の強さ・点渦の向き)分布(離散的か連続的か)が比較的シンプルである場合を考察する。この考察によって、単純モデルと確率論的モデル・決定論的モデルの解構造の類似点・相違点を整理する。類似の性質が成立すると予想される場合は、過去の研究を参考にして研究を進める。異なる性質が成立すると予想される場合は、円板領域における解構造、円環領域における解構造、全域解の性質を調べ上げ、これらにリンクした手法の開発を行い問題解決に取り組む。

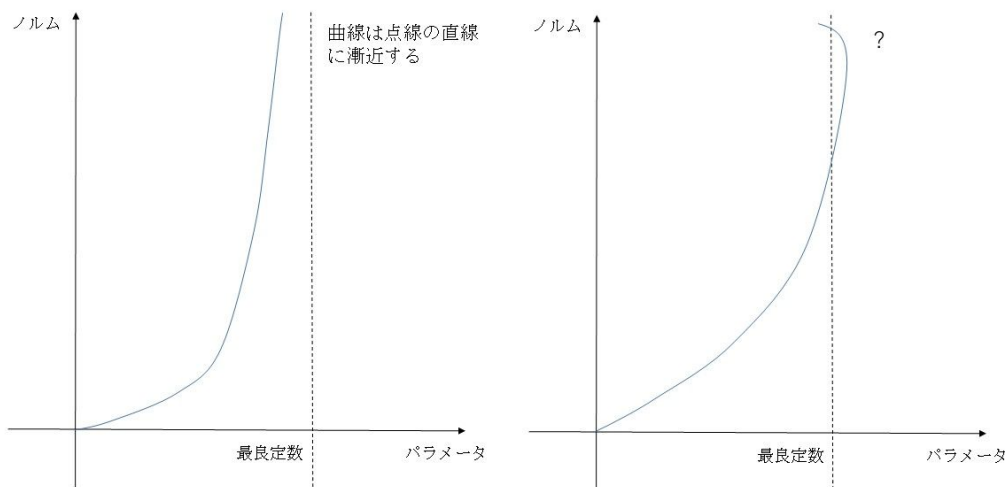
4. 研究成果

(1) 確率論的モデルに対する基本的な爆発解析

証明した性質は、解の凝縮またはコンパクト性の択一定理、境界爆発点の除去、質量関係式、グリーン関数およびロバン関数による爆発点の位置の特定である。これらのうち、境界爆発点の除去以外の性質は、過去の研究によって開発されたアイデア、手法を手掛かりに証明がなされた。新規性がある事項は境界爆発点の除去である。特に、渦の向きが正負ともに混在する場合についてこれを証明したことに意義があると考えられる。証明手法はグリーン関数の性質およびポホザエフの等式を組み合わせたものであり、当該研究分野においては新しい手法の一つだと思われる。この手法により、決定論的モデルや、高々指数関数の増大度をもつより一般の2次元半線形楕円型方程式の境界爆発点の除去の証明がなされることが期待される。

(2) 円板領域における解構造の研究

確率論的モデルおよび決定論的モデルに対して、正2強度という制約のもと、円板領域における解構造の研究を行った。決定論的モデルに対しては、単純モデルと同様の解構造をもつことが示唆された。実際、トゥルディンガ=モーザー型不等式の最良定数が、解の存在性・非存在性を分かつ逆温度に関連するパラメータの閾値と一致する。次ページの左図がそのイメージである。パラメータが最良定数未満である場合、解が存在し、パラメータが最良定数以上である場合、解は存在しないことが明らかとなった。ただし、解の存在範囲すべてにわたって、解の一意性が成立するか否かは不明である(もし肯定的な結果であれば、単純モデルと同様の性質を持つことがわかる)。一方、確率論的モデルに対しては、この一致性が必ずしも成立しないことが示された。これは当初の予想と異なるものであった(基本的な爆発解析の結果が単純モデルと類似しているため)。次ページの右図がそのイメージである。解の枝が最良定数を超えて伸びており、パラメータが最良定数を超えても解が存在しうることを示している。図からわかるように、最良定数付近では解の一意性が成立しない。また、図において、解の枝が点線の直線に漸近することが判明している。ただし、解の枝が点線の直線に何度交わるか、といった詳細な情報は不明である。



(3) その他の結果・知見

上記 (1)、(2) に加え、いくつかの部分的結果・知見が得られた。上記 (1) に関連して、爆発解の様評価が得られた。ただし、確率論的モデルと決定論的モデルの両モデルに対して、分布が連続である場合は満足のいく結果が得られていない。また、未完成であるが、両モデルに対する質量量子化の証明に取り組んでいる際、リスキューリングされた座標系において、異符号の点渦が衝突しないことを発見した。この性質は Yatsuyanagi et.al. 2005 等で観測された数値シミュレーションの結果を肯定的に支持するものと考えられる。上記 (2) に関連して、確率論的モデルに対して、3つのパラメータ（逆温度・点渦の強さ・点渦の向き）に新たな閾値があることが判明した。すなわち、上の図の右図のように解の枝が点線の直線と交わるか否かがそれらによって分類できることが判明した。ただし、各パラメータが閾値をとる場合に対しては、そのような分類ができるか否かは不明である。また、爆発解の構成は本研究期間において失敗に終わった。原因は、当初、（渦の向きが一定である）確率論的モデルが単純モデルと同じ構造をもつと予想していたため、第一近似として標準的なリュービル解を考えていたためである。しかし、上記 (2) の結果から推察されるように、これは正しくなく、第一近似として Poliakovski-Tarantello 2012 等で研究されている全域解を採用することが正しそうであるという知見を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計3件)

Tonia Ricciardi, Ryo Takahashi, On Radial two-species Onsager vortices near the critical temperature, Indiana University Mathematics Journal, 査読有、掲載決定
<https://www.iumj.indiana.edu/IUMJ/forthcoming.php>

Tonia Ricciardi, Ryo Takahashi, Blow-up behavior for a degenerate elliptic sinh-Poisson equation with variable intensities, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 査読有、55巻、2016
 DOI:10.1007/s00526-016-1090-8

Tonia Ricciardi, Ryo Takahashi, Gabriella Zecca, Xiao Zhang, On the existence and blow-up of solutions for a mean field equation with variable intensities, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, 査読有、27巻、2016、413-429
 DOI:10.4171/RLM/741

〔学会発表〕(計1件)

高橋亮, Critical exponents on some semilinear elliptic equations, Workshop in Nara University of Education 2016、奈良商工会議所 (2016年11月4日~11月6日)

6. 研究組織

(1) 研究分担者

(2)研究協力者

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。