

令和 3 年 6 月 10 日現在

機関番号：16301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17630

研究課題名（和文）多様体及びグラフの幾何構造と不均質媒質による散乱理論

研究課題名（英文）Scattering theory on manifolds and graphs via inhomogeneities

研究代表者

森岡 悠 (Morioka, Hisashi)

愛媛大学・理工学研究科（工学系）・講師

研究者番号：80726597

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：時間に関して定常的な摂動を含む波動方程式に対し、入射波に対して摂動によって散乱波が生じる現象を数学的に解析する研究を行った。本研究では、生じるべき散乱波が現れないような特殊な現象である非散乱エネルギーについて詳しく研究を行った。その結果、ある種の条件下では、非散乱エネルギーは離散的に分布し、また無限個存在することを示した。非散乱エネルギーの分布はワイル則と呼ばれる漸近的な評価を満たすことも証明した。一方、グラフ上の離散モデルの研究として、量子ウォークに対する散乱理論の研究を行った。主に1次元の量子ウォークについて、時間発展作用素の一般化固有関数と散乱行列の性質を詳しく調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、量子力学で知られている現象である共鳴トンネル効果に着想を得て開始したものである。共鳴トンネル効果は1次元の物理系では既によく知られているものであるが、本研究では、様々な不均質媒質や幾何構造による散乱理論を検討し、共鳴トンネル効果に相当する非散乱エネルギーがどのような条件下でどのように分布するのかを数学的に検証することを目標とした。多次元波動方程式の場合に非散乱エネルギーの存在とその分布について、一定の成果を得ることができた。非球対称な摂動を持つ多次元系で非散乱エネルギーの存在を示したのは本研究が最初である。また、離散的な系についても今後の研究につながる成果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：We studied the time-independent scattering theory for reduced wave equations with perturbations. In particular, we focused on a study of non-scattering energies (NSEs). We proved the discreteness and the existence of NSEs. Moreover, The number of NSEs satisfies a Weyl's law at infinity.

We also studied the scattering theory for quantum walks on lattices. For one-dimensional quantum walks, we derived some properties of the continuous spectrum and generalized eigenfunctions of time-evolution operators of quantum walks. We showed that the scattering matrix naturally appears in the asymptotic behavior of generalized eigenfunctions.

研究分野：散乱理論と逆問題

キーワード：関数解析学 散乱理論 関数方程式論 スペクトル理論 逆問題 量子ウォーク

1. 研究開始当初の背景

媒質の不均質性による波動伝播現象の散乱理論は、主にユークリッド空間上の音響波動方程式やマックスウェル方程式に対して研究が行われてきた。散乱現象の研究では、入射波(平面波)に対して散乱波の性質を明らかにするが、エネルギーと入射波によっては、入射波が透過して散乱波が見られない可能性があることが知られている。このようなエネルギーを非散乱エネルギーと呼び、対応する入射波を非散乱状態という。数学的には、散乱作用素が固有値 1 を持つということである。

一方、散乱理論の研究は、これに深く関連する微分(差分)作用素のスペクトル理論とともに、計量に対する一定の仮定をおいた非コンパクト多様体、及び一部の無限グラフでも進められて来ている。ここでは、作用素論による抽象理論のみならず、従前主にユークリッド空間で展開されてきた偏微分方程式的な精密な解析が、多様体やグラフ上でも展開できるようになってきたことが重要である。ただし、いずれもシュレーディンガー方程式を用いたポテンシャル散乱または計量による散乱の研究が中心であり、不均質媒質の問題設定での研究は少なく、特に、非散乱エネルギーと透過固有値問題はユークリッド空間の設定以外ではほとんど調べられていないのが研究開始当初の状況であった。

2. 研究の目的

本研究では、多様体及びグラフにおけるスペクトル、散乱理論の研究を基礎として、幾何構造を持つ空間での不均質媒質による散乱理論の研究を進めるべく、非散乱エネルギーと透過固有値問題の議論を行った。

(1) エンドを持つ多様体での散乱理論: 計量が遠方で何らかの形(ユークリッド、双曲的、シリンダー、カスプなど)に漸近するような多様体での散乱理論を調べる。

(2) 無限グラフ上での散乱理論: グラフ上では、無限次元摂動(例えば短距離型ポテンシャル)に対して埋蔵固有値の非存在の証明が完了していない。加えて、シリンダー型、双曲型のグラフもまだ調べられていない。本研究では、非散乱エネルギーの研究に向けて、その基礎となるこれらのテーマを含めた結果を得ることを試みる。

3. 研究の方法

(1) 多様体上の散乱理論については、ユークリッド空間に対し、有限の領域で係数と計量に対して摂動を加えられた多次元系において、非散乱エネルギーの存在と分布について調べた。これを調べるため、散乱行列と、領域境界で定義されるディリクレ-ノイマン写像が同値であることを利用し、摂動されている領域における透過固有値問題に帰着し、透過固有値問題に対する諸性質が非散乱エネルギーでも成り立つことを証明する方法を取った。

(2) グラフ上の散乱理論については、いまだ詳しく明らかになっていないスペクトル・散乱理論について基本的な性質があるため、散乱理論そのものの研究を進めた。

4. 研究成果

(1) 有界領域における透過固有値問題は、散乱理論とは独立に、連立偏微分方程式にかかわる非自己共役な固有値問題として詳しく研究されている。本研究では、これらの成果を非散乱エネルギーを調べるために応用した。具体的には、散乱波は放射条件により一意性が成り立つことを利用し、漸近挙動に現れる散乱行列と、摂動が存在する領域の境界で定義されるディリクレ-ノイマン写像は1対1に対応していることを示せる。これは散乱の逆問題でしばしば使われる手法である。このことから、正の透過固有値と非散乱エネルギーは1対1に対応していることを証明できる。従って、非散乱エネルギーを調べるには、実軸上正の部分に分布する透過固有値について詳しく分かれば良い。実軸上正の部分にある透過固有値に対しては、ワイル則が成り立つことが知られており、漸近的に個数を評価することができる。以上の事実から、ある条件下では非散乱エネルギーは無数個存在していることを示すことができた。摂動に対して球対称性を仮定しない場合、多次元系で非散乱エネルギーの存在を示したのは本研究が最初である。以上の成果は、遠方でユークリッド的な多様体上の変数係数音響波動方程式型の場合に得られたものである。双曲空間やシリンダー的空間など、非ユークリッド的な場合にも多くの部分は同様であると推測されるが、詳しい性質についての研究に着手することはできなかった。また、本研究の主要な結果は、シュレーディンガー方程式の散乱理論における半古典極限を取ったものに相当する。音響波動方程式の場合と比較して細かい点で異なる部分があり、現在はシュレーディンガー方程式に対する非散乱エネルギーと半古典近似に関する研究を続行中である。また、シュレーディンガー方程式のレゾナンスと非散乱エネルギーには何らかの関係があることも推測されるが、これについては今後の課題である。

(2) 無限グラフ上の散乱理論については、当初計画していた離散シュレーディンガー作用素に加え、副産物として量子ウォークの時間発展作用素に対するスペクトル理論を研究した。量子

ウォークの時間発展作用素は、2乗総和可能なベクトル列空間でユニタリ作用素である。この点で自己共役作用素に対するスペクトル散乱理論とは若干異なるが、離散シュレーディンガー作用素に対するこれまでの研究手法と成果を生かし、量子ウォークの連続スペクトルの性質と、一般化固有関数の構成及びその漸近挙動の解析を通じて、量子ウォークに対する散乱行列の性質を調べることができた。量子ウォークの特徴である局在化現象、弾道的拡散、トンネル効果とスペクトル・散乱理論は深く関連しており、これらの研究に対して一定の寄与ができた。具体的には以下の成果を得た。量子ウォークを規定するのは、状態を移動させるシフト作用素と、各点でカイラリティ毎の確率振幅を混ぜ合わせるコイン作用素の積である。本研究では、コイン作用素を位置に依存する変数とすることで、摂動のある量子ウォークを設定した。空間一様な量子ウォークに対し、摂動が有限次元あるいは無限次元でも極めて小さい場合に、連続スペクトルの内部に埋め込まれた固有値が生じる条件を示した。また、連続スペクトルに対応する一般化固有関数をAgmon-Hörmander型のBanach空間で特徴付け、その漸近挙動を求めることにより、散乱行列の特徴付けを行った。副産物として、量子ウォークで生じる局在化とトンネル効果に関するいくつかの事項について、ある種の量子ウォークで散乱理論の立場から厳密に記述した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takashi Komatsu, Norio Konno, Hisashi Morioka, Etsuo Segawa	4. 巻 Online Ready
2. 論文標題 Generalized eigenfunctions for quantum walks via path counting approach	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Reviews in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1-24
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055X215001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hisashi Morioka, Etsuo Segawa	4. 巻 18
2. 論文標題 Detection of edge defects by embedded eigenvalues of quantum walks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 1-18
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11128-019-2398-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Morioka Hisashi, Shoji Naotaka	4. 巻 61
2. 論文標題 Non-scattering energies for acoustic-type equations on manifolds with a single flat end	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1-36
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5111890	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hisashi Morioka	4. 巻 31
2. 論文標題 Generalized eigenfunctions and scattering matrices for position-dependent quantum walks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Reviews in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055X19500193	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kazunori Ando, Hiroshi Isozaki, Hisashi Morioka	4. 巻 19
2. 論文標題 Inverse scattering for Schrodinger operators on perturbed lattices	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annales Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 3397-3455
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-018-0721-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計33件 (うち招待講演 19件 / うち国際学会 13件)

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 定常波動方程式に対する非散乱エネルギーについて
3. 学会等名 微分方程式の総合的研究 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 1次元2状態量子ウォークの一般化固有関数と散乱行列
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型)「量子ウォークとスペクトル散乱理論の数理」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 Weyl-type lower bound for non-scattering energies for acoustic equations
3. 学会等名 Summer School on Applied Inverse Problems and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 定常音響波動方程式の非散乱エネルギーに対するワイル則
3. 学会等名 2019夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 1次元2状態量子ウォークの一般化固有関数とS-行列
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 Non-scattering energies for acoustic-type equations on manifolds with a single flat end
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「スペクトル・散乱理論とその周辺」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 Non-scattering energies for acoustic-type equations on manifolds with a single flat end
3. 学会等名 Schrodinger Operators and Related Topics (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 小松 堯, 今野紀雄, 森岡 悠, 瀬川悦生
2. 発表標題 パスの数え上げによる1次元2状態量子ウォークに対する散乱行列の明示公式
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 Weyl's law of non-scattering energies for time-harmonic acoustic equations
3. 学会等名 Mini-workshop Neumann-Poincare operator and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 Weyl's law of non-scattering energies for time-harmonic acoustic equations
3. 学会等名 International Workshop on ``Tomography and Inverse Problem" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 Weyl-type lower bound for non-scattering energies of time-harmonic acoustic equations
3. 学会等名 日本数学会年会 関数解析学分科会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 Weyl's law of non-scattering energies for time-harmonic acoustic equations
3. 学会等名 RIMS Workshop on "Inverse problems for partial differential equations and related areas" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 Probing defects via inverse scattering on perturbed lattices
3. 学会等名 AIMR Workshop on Pure and Applied Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 量子ウォークの一般化固有関数と散乱行列
3. 学会等名 2018年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 音響波動方程式における非散乱エネルギーに対するWeyl則について
3. 学会等名 愛媛大学解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 Generalized eigenfunctions and scattering matrices for position-dependent quantum walks
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域第7回研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 Generalized eigenfunction of unitary operators associated with quantum walks on Z
3. 学会等名 Chile-Japan Workshop on Mathematical Physics and Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 瀬川悦生, 森岡 悠
2. 発表標題 Detection of edge defects by embedded eigenvalues of quantum walks
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 関数解析学分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 量子ウォークにおける埋蔵固有値を用いた辺欠損の検出について
3. 学会等名 2018夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 On embedded eigenvalues -discrete Laplacians and quantum walks-
3. 学会等名 グラフ上の逆問題、スペクトル解析と関連課題研究ワークショップ（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 磁場付き離散シュレーディンガー作用素の連続スペクトルについて
3. 学会等名 2017年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 磁場付き離散シュレーディンガー作用素に対するレリッヒ型一意性定理について
3. 学会等名 松山スペクトル・散乱セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 Dirichlet-Neumann写像による格子欠損の位置決定
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第6回研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森岡 悠, 庄司直高
2. 発表標題 Interior transmission eigenvalue problems on compact manifolds with smooth boundary
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 格子欠損の位置決定について
3. 学会等名 2017夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 長距離型ポテンシャルを持つ離散シュレーディンガー作用素の埋蔵固有値の非存在
3. 学会等名 作用素論セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hisashi Morioka
2. 発表標題 Absence of embedded eigenvalues for discrete Schrodinger operators with decaying potentials
3. 学会等名 RIMS合宿型セミナー ``Workshop on linear and nonlinear dispersive equations and related topics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazunori Ando, Hiroshi Isozaki, Hisashi Morioka
2. 発表標題 Inverse scattering problems on perturbed lattices and geometry of networks
3. 学会等名 RIMS Workshop on "Inverse problems for partial differential equations and related areas" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 安藤和典, 磯崎 洋, 森岡 悠
2. 発表標題 格子上の逆散乱問題とネットワークの逆問題
3. 学会等名 2016年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 森岡 悠, 庄司直高
2. 発表標題 Weyl's lower bounds of positive interior transmission eigenvalues on manifolds
3. 学会等名 作用素論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kazunori Ando, Hiroshi Isozaki, Hisashi Morioka
2. 発表標題 Inverse scattering problems on perturbed lattices and geometry of networks
3. 学会等名 2nd East Asia Section of IPIA-Young Scholars Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hisashi Morioka, Naotaka Shoji
2. 発表標題 Non-scattering energy and transmission eigenvalue problems on manifolds
3. 学会等名 The 14th Linear and Nonlinear Waves (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 森岡 悠
2. 発表標題 非散乱エネルギーと透過固有値問題
3. 学会等名 神戸大学解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 Workshop for young scholars Control and inverse problems on waves, oscillations and flows - Mathematical analysis and computational methods -	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Workshop for young scholars Control and inverse problems on waves, oscillations and flows - Mathematical analysis and computational methods -	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Kyoto-Imadegawa symposium on Spectral and Scattering Theory	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Workshop for young scholars Control and inverse problems on waves, oscillations and flows - Mathematical analysis and computational methods -	開催年 2017年～2017年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------