

令和 3 年 6 月 16 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2020

課題番号：16K17633

研究課題名(和文)量子散乱現象の作用素論的研究

研究課題名(英文)Operator study for quantum scattering phenomena

研究代表者

石田 敦英(Ishida, Atsuhide)

東京理科大学・工学部教養・講師

研究者番号：30706817

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：量子力学の数学的散乱理論においては、非摂動系と摂動系のシュレディンガー方程式の時間発展作用素を組み合わせた強極限で与えられる波動作用素の存在を調べることで、その摂動系での散乱状態の理解が得られる。研究成果としては、1. 分数冪ラプラス作用素、質量を持つ相対論的シュレディンガー作用素、非局所的シュレディンガー作用素、時間減衰する調和振動子について、波動作用素の存在・非存在の必要十分条件を相互作用ポテンシャルの空間減衰の速さで特徴付けた。2. 分数冪ラプラス作用素と電場を伴うシュレディンガー作用素に対して、波動作用素を用いて定義される散乱作用素から相互作用ポテンシャルの一意性を導く逆問題を議論した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

偏微分方程式の解の時間発展や漸近的挙動を解析することは、具体的に書き表すことができないような解の形状や性質を知るための大きな手がかりを与える。波動作用素はシュレディンガー方程式の解の時間極限から得られる作用素で、任意の波動関数を散乱状態の波動関数に対応させる働きを持つ。つまりその系における散乱現象を保証する。このような物理的にも重要な役割を担う波動作用素について、存在するか否かをポテンシャルの空間減衰の速さで明確にしたこと、またポテンシャルの一意性を導く逆問題を扱った本研究成果は、散乱という物理現象に新しい理解を与えることとなった。

研究成果の概要(英文)：In mathematical scattering theory for quantum mechanics, the existence of wave operators given by the strong limits of the combined time-evolving operator of the Schrodinger equations for non-perturbative and perturbative systems provides an understanding of the scattering state in that perturbative system. The research results on this project are stated below. We characterized the necessary and sufficient conditions for the existence and non-existence of wave operators by the speed of spatial decay of the interaction potentials for fractional Laplacian, massive relativistic Schrodinger operator, non-local Schrodinger operator, and time-decaying harmonic oscillator. We also discussed the inverse problems of deriving the uniqueness of the interaction potentials from the scattering operator defined by the wave operators for fractional Laplacian and Schrodinger operator with electric field.

研究分野：量子力学の数学的散乱理論

キーワード：シュレディンガー方程式 波動作用素 散乱作用素 逆散乱 分数冪ラプラス作用素 非局所的シュレディンガー作用素 シュタルク効果 調和振動子

### 1. 研究開始当初の背景

シュレディンガー方程式は豊富な数学的構造を持つ。特に散乱理論の研究は、偏微分方程式論的手法と関数解析学的手法が両立しながら発展してきた。 $H_0$ を非摂動系(例えば $H_0 = -\Delta$ )、 $H = H_0 + V$ を摂動系とする。ここで $V = V(x)$ は粒子間に働く相互作用ポテンシャルを表し、空間遠方ではその値が消えていくものを想定している。数学的散乱理論のメインテーマは、次の $L^2(\mathbb{R}^n)$ での強極限で定義される波動作用素

$$W^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH} e^{-iH_0 t}$$

を解析することである。研究代表者は、本研究課題の申請時において、斥力項を伴うシュレディンガー作用素 $H = -\Delta - |x|^2 + V$ の研究の力を注いでおり、逆問題の結果[1]や波動作用素の存在条件[2](当時は査読中)などの研究成果が得られていた。またこれに並行して、分数冪ラプラス作用素 $H = (-\Delta)^\rho + V$ の研究を手掛け始めていた。

### 2. 研究の目的

上述の研究背景の下、本研究課題申請当初の研究目的は、斥力項を伴うシュレディンガー作用素に対して1.長距離散乱理論の構築、および2.電荷輸送モデルと多体問題への応用、3.その他の量子力学モデルにおける散乱現象の解明。以上三つを軸とするものであった。特に3のその他の量子力学モデルについては、着手し始めた分数冪ラプラス作用素の逆問題の研究を念頭に置いていた。

### 3. 研究の方法

当初計画していた研究目的の1と2は実現できなかった。しかし3については、分数冪ラプラス作用素に対する波動作用素の存在条件[3]や、逆問題としての短距離型相互作用ポテンシャルの一意性[5]の証明を完遂した。よってここではこれらの分数冪ラプラス作用素での研究で用いた手法について触れておく。空間減衰が十分に速く波動作用素が存在するようなポテンシャルは短距離型と呼ばれ、減衰が遅すぎて波動作用素が存在できないようなポテンシャルは長距離型と呼ばれる。この閾値を調べる手法はいくつか知られているが、[3]で用いられたものはDollard(1971)が通常のシュレディンガー作用素とクーロンポテンシャルに対して最初に導入した手法である。逆問題に関しては、Enss-Weder(1995)によって発案された手法を用いた。この手法は「エンス・ヴェーダーの方法」として知られており、多くの量子力学モデルで応用されている。なお、その他の量子力学モデルの散乱現象についても様々な結果が得られた。それらについては次項の研究成果を参照頂きたい。

### 4. 研究成果

論文として出版された順に述べていく。

上で述べたように[3]では、分数冪ラプラス作用素 $H = (-\Delta)^\rho + V$ について、短距離型と長距離型の閾値なる $V$ の空間遠方での減衰の条件を決定した。ただし、 $1/2 < \rho \leq 1$ である。具体的には $x \rightarrow \infty$ のとき $V(x) = O(|x|^{-\gamma})$ とすると $\gamma = 1$ がその閾値となることを証明した。短距離型と長距離型の閾値は、粒子の古典軌道から導かれるため、各モデルによって独自に定まる値であり、古典力学と量子力学を結び付ける点でも重要な意味を持つ。

[4]ではシュタルク効果を伴う量子力学系 $H = -\Delta - E \cdot x + V$ において、エンス・ヴェーダーの方法によってポテンシャルの一意性を証明した。特に短距離型ポテンシャルの一階導関数の空間遠方での減衰条件を先行研究から大きく改善し、物理的にも自然な仮定の下での一意性が得られた。

上でも述べた[5]では、まずエンス型評価と呼ばれる粒子伝播に関する不等式を証明した。この不等式はEnss(1983)が通常のラプラス作用素に対して得ていたものを分数冪版に拡張したものである。さらにその不等式をエンス・ヴェーダーの方法に応用し、逆問題としての短距離型ポテンシャルの一意性を証明した。

[6]では、時間減衰する調和振動子 $H(t) = -\Delta + k(t)|x|^2 + V$ について、波動作用素の存在、非存在、さらには長距離型ポテンシャルの場合の修正波動作用素の存在について議論した。 $k(t) \equiv k > 0$ と定数ならばよく知られた調和振動子で散乱は起き得ない。ところが $0 < \sigma < 1/8$ に対して $k(t) = \sigma/t^2$ と時間に関して二乗のオーダーで減衰する場合には散乱状態が現れ、波動作用素が存在することを示した。またこのモデルにおいて、短距離型と長距離型のポテンシャルの減衰の閾値は $\gamma = 1/(1-\lambda)$ であることを明らかにした。ここで $\lambda = (1 - \sqrt{1-8\sigma})/2$ である。

[7]では、分数冪ラプラス作用素 $H = (-\Delta)^\rho + V$ において $0 < \rho \leq 1$ としたものや、質量を持つ相対論的シュレディンガー作用素の分数冪版 $H = (-\Delta + 1)^\rho + V$ なども含んだ、より一般的な非局所的シュレディンガー作用素 $H = \Psi(-\Delta) + V$ について、短距離型と長距離型のポテンシャルの減衰の閾値が $\gamma = 1$ であることを証明した。特に分数冪ラプラス作用素の[3]では $1/2 < \rho \leq 1$ の範囲でしか扱われていなかったが、これを大きく拡張できた。

[8]では質量を持つ相対論的シュレディンガー作用素 $H = \sqrt{-\Delta + 1} + V$ に対して、短距離型と長距離型のポテンシャルの減衰の閾値が $\gamma = 1$ であることを証明した。出版が[7]より後になったが、証明は[7]より先に完了していたもので、分数冪ラプラス作用素の[3]において $\rho = 1/2$ を扱うことができなかったが、質量を加えれば $\rho = 1/2$ に対応する結果が得られた。[3]と[8]の研究結果はすべて[7]によって一般化されることになる。

[9]は[6]で議論した時間減衰する調和振動子について、[6]で扱われてなかった臨界の場合の $\sigma = 1/8$ を扱い、短距離型と長距離型のポテンシャルの減衰の閾値を明らかにした。 $\sigma = 1/8$ のとき $\lambda = 1/2$ であるから、一見すると閾値は $\gamma = 2$ となるように思われるが、実はそうは単純ではない。結論としては $V(x) = O(|x|^{-2}(\log|x|)^\kappa)$ と表したとき、 $\kappa < 1$ が短距離型、 $\kappa \geq 1$ が長距離型となる。粒子の挙動は $\sigma < 1/8$ と $\sigma = 1/8$ では大きく異なり、本研究結果は古典軌道をより精密に追跡することで成し遂げられた。

#### 【引用文献】

[1] A. Ishida, “On inverse scattering problem for the Schrödinger equation with repulsive potentials”, J. Math. Phys. 55 (2014), no.8, 08201, 12 pp.

[2] A. Ishida, “The borderline of the short-range condition for the repulsive Hamiltonian”, J. Math. Anal. Appl. 438 (2016), no.1, 267–273.

[3] A. Ishida, “Non-existence of standard wave operators for fractional Laplacian and slowly decaying potentials”, East Asian J. Appl. Math. 9 (2019), no.2, 233–240.

[4] A. Ishida, “Inverse scattering in the Stark effect”, Inverse Problems 35 (2019), no.10, 105010, 20 pp.

[5] A. Ishida, “Propagation property and application to inverse scattering for fractional powers of negative Laplacian”, East Asian J. Appl. Math. 10 (2020), no.1, 106–122.

[6] A. Ishida, M. Kawamoto, “Existence and nonexistence of wave operators for time-decaying harmonic oscillators”, Rep. Math. Phys. 85 (2020), no.3, 335–350.

[7] A. Ishida, K. Wada, “Threshold between short and long-range potentials for non-local Schrödinger operators”, Math. Phys. Anal. Geom. 23 (2020), no.3, 32, 11 pp.

[8] A. Ishida, “Nonexistence result for wave operators in massive relativistic system”, P. Miranda, N. Popoff, G. Raikov (des) Spectral Theory and Mathematical Physics. Latin American Mathematical Series. Springer, Cham. (2020), 171–178.

[9] A. Ishida, M. Kawamoto, “Critical scattering in a time-dependent harmonic oscillator”, J. Math. Anal. Appl. 492 (2020), no.2, 124475, 9 pp.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Atsuhide Ishida	4. 巻 35
2. 論文標題 Inverse scattering in the Stark effect	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Inverse Problems	6. 最初と最後の頁 105010
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6420/ab2fec	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Atsuhide Ishida	4. 巻 10
2. 論文標題 Propagation property and application to inverse scattering for fractional powers of negative Laplacian	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 East Asian Journal on Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 106-122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4208/eajam.050319.110619	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Atsuhide Ishida, Masaki Kawamoto	4. 巻 85
2. 論文標題 Existence and nonexistence of wave operators for time-decaying harmonic oscillators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Reports on Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 335-350
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/S0034-4877(20)30040-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Atsuhide Ishida	4. 巻 -
2. 論文標題 Nonexistence result for wave operators in massive relativistic system	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Springer Latin America series, Spectral Theory and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-55556-6_9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsuhide Ishida	4. 巻 9
2. 論文標題 Non-existence of standard wave operators for fractional Laplacian and slowly decaying potentials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 East Asian Journal on Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 233-240
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4208/eajam.230418.170918	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Atsuhide ISHIDA	4. 巻 2045
2. 論文標題 Propagation property and inverse scattering for the fractional power of negative Laplacian	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 数理解析研究所講義録「スペクトル・散乱理論とその周辺」	6. 最初と最後の頁 132-136
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計40件 (うち招待講演 23件 / うち国際学会 22件)

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 シュタルク効果の下での逆散乱について
3. 学会等名 第161回神楽坂解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 分数冪ラプラシアンについてのエンス型伝播評価と逆散乱
3. 学会等名 線形および非線形分散型方程式の研究 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atushide Ishida
2. 発表標題 On inverse scattering for Stark Hamiltonians
3. 学会等名 The 5th East Asia Section of IPIA Young Scholars Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 シュタルク効果の下での逆散乱について
3. 学会等名 作用素論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atushide Ishida
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for fractional powers of negative Laplacian
3. 学会等名 Applied Inverse Problems Conference 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atushide Ishida
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for fractional powers of negative Laplacian
3. 学会等名 International Workshop on Operator Theory and its Application 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atushide Ishida
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for fractional powers of negative Laplacian
3. 学会等名 QMath14 : Mathematical Results in Quantum Physics ( 国際学会 )
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atushide Ishida
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for fractional powers of negative Laplacian
3. 学会等名 Asymptotic Analysis & Spectral Theory ( 国際学会 )
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Atushide Ishida
2. 発表標題 Inverse scattering in Stark effect
3. 学会等名 Naha Symposium on Spectral and Scattering Theory ( 招待講演 ) ( 国際学会 )
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 分数冪ラプラシアンの下でのエンス型伝播評価と逆問題について
3. 学会等名 第3回ひこね解析セミナー ( 招待講演 )
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 分数冪ラプラシアンの下でのエンス型伝播評価と逆問題について
3. 学会等名 信州大学偏微分方程式研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for fractional powers of the negative Laplacian
3. 学会等名 Inverse Problems, Imaging and Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Non-existence of wave operators for repulsive Hamiltonians
3. 学会等名 The 11th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute, The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for fractional powers of the negative Laplacian
3. 学会等名 International Congress on Mathematical Physics 2018 Young Researchers Symposium (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Non-existence of wave operators for repulsive Hamiltonians
3. 学会等名 International Congress of Mathematicians Rio de Janeiro 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 分数冪ラプラシアンの下での短距離型クラスと長距離型クラスの境目について
3. 学会等名 2018年夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for fractional powers of negative Laplacian
3. 学会等名 Chile-Japan Workshop on Mathematical Physics and Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 分数冪ラプラシアンの下での短距離型クラスと長距離型クラスの境目について
3. 学会等名 名古屋偏微分方程式研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 Nonexistence of wave operators for fractional powers of negative Laplacian
3. 学会等名 第28回数理解物理と微分方程式
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for fractional powers of negative Laplacian
3. 学会等名 International Conference Spectral Theory and Mathematical Physics STMP 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 On inverse scattering for Stark Hamiltonian
3. 学会等名 Mathematics of Schroedinger Equations and Related Topics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 分数冪ラプラシアンの下での長距離逆散乱について
3. 学会等名 作用素論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 強い特異性を持つ相互作用と斥力項の下での量子逆散乱 (その2)
3. 学会等名 2017年夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for the fractional power of negative Laplacian
3. 学会等名 Equadiff 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for the fractional power of negative Laplacian
3. 学会等名 若手研究会「波動・振動・流れの制御と逆問題-理論と数値計算-」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for the fractional power of negative Laplacian
3. 学会等名 函館偏微分方程式研究会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 On the inverse scattering for fractional powers of the negative Laplacian
3. 学会等名 Inverse problems of partial differential equations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for fractional powers of the negative Laplacian
3. 学会等名 The 3rd East Asia Section of IPIA Young Scholars Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 A propagation property for the fractional power of negative Laplacian
3. 学会等名 第140回神楽坂解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 A propagation property for the fractional power of negative Laplacian
3. 学会等名 第152回学習院大学スペクトル理論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 A propagation property for the fractional power of negative Laplacian
3. 学会等名 Lectures on Semi-Classical Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Non-existence of the wave operators for the repulsive Hamiltonians
3. 学会等名 Operator Theory, Analysis and Mathematical Physics (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 分数冪ラプラシアンについてのエンス型伝播評価と逆問題
3. 学会等名 第5回岐阜数理科学研究会 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 強い特異性を持つ相互作用と斥力項の下での量子逆散乱
3. 学会等名 2016年夏の作用素論シンポジウム
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 時間変動電場に伴う量子散乱の順問題と逆問題について
3. 学会等名 日本数学会2016年度秋季総合分科会 函数方程式論分科会特別講演（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Non-existence of the wave operators for the repulsive Hamiltonians
3. 学会等名 QMath13 : Mathematical Results in Quantum Physics (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Non-existence of the wave operators for the repulsive Hamiltonians
3. 学会等名 The 14th Linear and Nonlinear Waves (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for the fractional power of negative Laplacian
3. 学会等名 Spectral and Scattering Theory and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 石田敦英
2. 発表標題 斥力項を持つ量子系での散乱について
3. 学会等名 第5回信州関数解析シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Atsuhide ISHIDA
2. 発表標題 Propagation property and inverse scattering for the fractional power of negative Laplacian
3. 学会等名 Inverse problems for partial differential equations and related areas (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Schroedinger Operators and Related Topics -In honor of Professor Shu Nakamura on his sixtieth birthday-	開催年 2020年~2020年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------