

令和元年6月6日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K17647

研究課題名(和文)リーマン多様体上の共役勾配法の進展および諸分野における大規模問題への応用

研究課題名(英文) Development of Riemannian conjugate gradient methods and their applications to large-scale problems

研究代表者

佐藤 寛之 (SATO, Hiroyuki)

京都大学・情報学研究科・特定准教授

研究者番号：80734433

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：統計手法の一種である正準相関分析などの重要な応用例をもつ一般化シュティーフエル多様体上で、共役勾配法を含む、リーマン多様体上の最適化手法において必要不可欠なレトラクションについて、新たなものの開発とその効率的な実装法の提案を行った。また、制御工学への応用として、システム同定や大規模なシステムの低次元化において現れるリーマン多様体上の最適化問題に対して、共役勾配法に基づく新たな求解アルゴリズムを提案した。さらに、ビッグデータを伴う機械学習などにおいて現れる大規模な最適化問題に対して有効な、確率的最適化アルゴリズムをリーマン多様体上に拡張し、その収束性解析や数値実験による性能の実証を詳細に行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果によって、機械学習や制御工学などにおいて現れる最適化問題の一部をより高速に解くことができるようになった。また、リーマン多様体上の共役勾配法や確率的最適化手法の一般論を発展させたことによって、それらが適用できるような大規模な問題をより効果的に解くための土台が築かれたといえる。個別の問題に対して、本研究で提案したアルゴリズムに基づくアプローチを構築することによって、諸分野における技術のさらなる発展が期待される。

研究成果の概要(英文)：The generalized Stiefel manifold has important applications including the canonical correlation analysis. This research proposed a new retraction and its efficient implementation on this manifold, which is essential in Riemannian optimization methods such as the conjugate gradient method. As applications to control engineering, this research also proposed new algorithms for system identification and optimal model reduction problems, some of which are based on the Riemannian conjugate gradient method. Furthermore, this research generalized stochastic optimization methods, which are effective for large-scale optimization problems in machine learning with big data, to Riemannian manifolds together with their convergence analyses and numerical verification of their performances.

研究分野：数理最適化

キーワード：最適化 アルゴリズム 数値線形代数 機械学習 制御工学 応用数学 幾何学

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初、制約つき最適化問題において、制約条件を満たす変数全体がリーマン多様体をなす場合には、これをその多様体上の無制約最適化問題と見なして最適化アルゴリズムを議論するという研究が盛んに行われるようになっていた。リーマン多様体上の無制約最適化を考えることで、ユークリッド空間における既存の無制約最適化手法を多様体上に拡張して、その収束性を引き継ぐ良いアルゴリズムが得られる。リーマン多様体上の最適化問題は様々な応用例を持つことが知られており、特に、シュティーフェル多様体やグラスマン多様体などの行列空間の部分多様体や商多様体として表される行列多様体は、数値線形代数、統計アルゴリズム、制御工学などにおいて現れる問題と相性が良いことが知られていた。そこで、リーマン多様体上の最適化の理論やアルゴリズムとその性質など、当該分野全般についての研究がさらに進展することが望まれていた。

一方で、ビッグデータの解析などに付随して、大規模な最適化問題を効率的に解くことの必要性が生じていた。ユークリッド空間における共役勾配法は、独立変数の個数が多い場合に有効な最適化手法であることがよく知られていた。これをリーマン多様体上に拡張すると、着目しているリーマン多様体の次元が大きい場合に有効な最適化手法となることが期待される。そこで、リーマン多様体上の共役勾配法および関連するアルゴリズムを進展させること、また、そうした手法を大規模問題へ応用することは、ビッグデータを伴う機械学習や人工知能などの技術の発展に繋がることも期待され、この分野の発展は学術的のみならず社会的にも意義深いという背景があった。

### 2. 研究の目的

以上の背景から、本研究では、共役勾配法や関連する最適化アルゴリズムをリーマン多様体上に拡張するとともに、それらの大規模問題への応用を行うことを目的とした。

単に既存のアルゴリズムをリーマン多様体上に拡張するだけでなく、その収束性解析や、数値実験による性能の実証も行うことが望ましい。また、そうした理論的・数値的な観点からの観察を踏まえて必要な修正を施すことによって、より適切なアルゴリズムを提案することが可能となる。さらに、こうしたアルゴリズムの根底をなすトピックとして、リーマン多様体上の最適化の特定の手法に限らない一般的な道具であるレトラクションや、接空間の表現についても議論し、リーマン多様体上の最適化全般の進展をも目指した。

リーマン多様体上の最適化の応用例としては、主成分分析や独立成分分析などの統計アルゴリズム、制御工学におけるシステム同定やモデルの低次元化、多くの科学技術を支える行列の固有値分解や特異値分解などの数値線形代数における問題、機械学習のための行列補完など、枚挙に暇がない。こうした問題に提案手法を実際に応用することや、個別の構造に着目してより効果的なアルゴリズムを導出することも本研究の目的であった。特に、機械学習などに現れる大規模な最適化問題に対して、本研究で得られた確率的最適化を実際に適用し、その効果を実証することは重要であった。

### 3. 研究の方法

研究代表者のこれまでの理論的な研究成果および共同研究者との協力によって、リーマン多様体上の最適化アルゴリズムの理論的な解析のみならず、数値線形代数や機械学習、制御工学などへの応用を行った。また、個別の問題の構造に応じて、より適切なアルゴリズムの提案および解析を行った。

具体的には、共役勾配法において点列を生成する際には、一つ前の点における探索方向と現在の点での目的関数の勾配を足し合わせる必要があるが、これはリーマン多様体上では異なる2点での接ベクトルを足し合わせることになり、そのまま計算することはできない。そこで、リーマン多様体上の平行移動の概念を一般化した vector transport と呼ばれる写像を用いてその困難を解決する。計算量の観点からも、平行移動の近似である vector transport は有用である。この考え方を応用することで、アルゴリズムの開発の観点からは確率的最適化などにおいて現れる同様の困難を解決し、理論的な解析の観点からは vector transport の性質を利用した提案アルゴリズムの収束性の証明を行い、応用の観点からは個別の最適化問題に付随する多様体上の vector transport を提案することで共役勾配法などを適用できるようにした。

研究の過程では、研究協力者と密に連絡を取り合い、問題点の共有・整理、解決策の議論、得られた結果に対する考察などを行い、各分野において、より適したアルゴリズムを得ることを目指した。また、国内外の学会や研究集会において、研究成果の発表を経て他の研究者と議論したり、同分野や他分野の最先端の研究成果についての情報収集を行うことで、本研究をより推進できるよう努めた。

### 4. 研究成果

(1) シュティーフェル多様体上の QR 分解に基づくレトラクションから、一般化シュティーフェル多様体上の新たなレトラクションを構成し、さらにコレスキー QR 分解に基づく効率的な実装法を提案した。得られた新たなレトラクションは、素朴にはある正定値対称行列の平方根やそれに関する逆変換を含む形として得られるが、提案した効率的な実装では、これらの計算を回避することができ、計算量の大幅な削減を達成している。

さらに、レトラクションは、共役勾配法を含む、リーマン多様体上の一般的な最適化アルゴリズムにおいて点列を生成するために必要不可欠である。そこで、レトラクションの構成方法についての一般的な理論として、ある多様体上でレトラクションが与えられたときに、それと同相な多様体上のレトラクションを構成する方法を与え、この方法が正当であることを保証するための定理も証明した。

また、具体例として、正準相関分析をサイズの異なる2つの一般化シュティーフェル多様体の積多様体上の最適化問題として定式化し、提案したレトラクションを用いた共役勾配法をその問題に適用することで、実際に問題が効率的に解けること、および、人工的に生成した大規模な問題に対して、提案したレトラクションが効果的に働くことを数値実験により確認することができた。極分解に基づく既存のレトラクションとの比較も行い、一般化シュティーフェル多様体に属する行列の列数が大きいほど、提案したレトラクションの計算効率が良くなることを明らかにした。

(2) ビッグデータを伴う機械学習においては、目的関数が非常に多数の項の和で構成される最適化問題がしばしば現れる。このような形の大規模問題に対して有効な確率的最適化アルゴリズムをリーマン多様体上に拡張した。

具体的には、2013年に提案された重要な確率的最適化アルゴリズムである stochastic variance reduced gradient method (SVRG)、共役勾配法のように直前の探索方向の情報を取り入れて新たな探索方向を計算する stochastic recursive gradient method (SRG)、および、quasi-Newton algorithm with variance reduction (SQN-VR) の3つの拡張に取り組んだ。これらについて、レトラクションや vector transport を用いたアルゴリズムの提案および、それらの収束性の詳細な解析を行うとともに、主成分分析や行列補完、また重心の概念をリーマン多様体上に拡張した Riemannian centroid を求める問題などに提案手法を適用し、その効果を実証した。

レトラクションや vector transport は数値的に計算しやすい一方で、理論的には指数写像や平行移動の近似であることに伴い議論が比較的複雑になるが、レトラクションや vector transport についての先行研究の結果を援用することで、指数写像や平行移動を用いた場合との差異を適切に評価し、収束性の証明を完成することができた。

(3) 制御工学分野への応用として、システム同定法の一つである予測誤差法において、同定すべきシステム行列を、ある積多様体上の点や、あるいは、一般線形群の作用によって得られる商多様体上の点と見なすことで、幾何学的な共役勾配法に基づくアルゴリズムを提案した。上記の積多様体と商多様体の上での最急降下法が数値的に等価なアルゴリズムになる一方で、共役勾配法は、2つの多様体上で異なるアルゴリズムとなることを明らかにし、商多様体上の共役勾配法がより効果的であることを数値的に確認した。

また、大規模なシステムに対して適切な制御器を設計する問題を、リーマン多様体上の最適化問題として定式化し、共役勾配法や信頼領域法に基づく解法アルゴリズムを提案した。この問題に対しても、提案手法の有効性を数値実験により確認することができた。特に、正定値対称行列全体が構成するリーマン多様体を考えることで、システムがもつ対称的な構造を保存するように最適化を行う新たな技法を提案することができた。

(4) (1)において、コレスキーQR分解を適用することで新たな成果が得られたことは、リーマン多様体上の最適化の数値線形代数との融合という観点からも重要である。この観点からの研究として、他にも、クリロフ部分空間法をリーマン多様体上のニュートン方程式に適用することで効率的にニュートン法を実装できることを、理論的および数値的に示した。

具体的には、シュティーフェル多様体やグラスマン多様体の接空間に適切な基底を導入し、その基底に関する接ベクトルの成分を行列で表現することで、多様体の次元と同数の成分をもつ行列についての方程式としてニュートン方程式を表現した。ニュートン方程式は接ベクトルについての線形方程式であるため、この方程式に対して共役残差法などのクリロフ部分空間法を適用することで、ニュートン法の効果的な実装を提案することができた。特に、シュティーフェル多様体やグラスマン多様体上の大規模な最適化問題を扱う場合には、提案手法を用いることで、素朴な手法によって得られるニュートン方程式よりも解くべきニュートン方程式の変数の数を大きく削減することが可能となり、効率的な計算に繋がる。

また、応用例として、独立成分分析において現れる最適化問題を扱った。これは複数の対称行列の近似的同時対角化を達成する列直交行列を求める問題として表され、シュティーフェル多様体上の最適化問題となる。目的関数の勾配およびヘシアンを詳細に解析し、適切な基底の下での表現行列を求めた。さらに、行列空間における標準内積から誘導されるシュティーフェル多様体上のリーマン計量に修正を施した、canonical metric と呼ばれるリーマン計量を備えたシュティーフェル多様体では、同様のヘシアンの表現行列が対称行列となることを示し、共役残差法などの効果的なクリロフ部分空間法を適用できることも示した。また、以上の結果が具体的な数値例に対しても実際に有効であることを、数値実験によって実証した。

## 5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 19 件)

- [1] 佐藤寛之, 笠井裕之, Bamdev Mishra, リーマン多様体上の確率的最適化の発展, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読なし, 2108, to appear.  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2108.html>
- [2] H. Sato, H. Kasai, and B. Mishra, Riemannian stochastic variance reduced gradient algorithm with retraction and vector transport, *SIAM Journal on Optimization*, 査読有, 29(2), 1444–1472, 2019.  
DOI: 10.1137/17M1116787
- [3] H. Sato and K. Aihara, Cholesky QR-based retraction on the generalized Stiefel manifold, *Computational Optimization and Applications*, 査読有, 72(2), 293–308, 2019.  
DOI: 10.1007/s10589-018-0046-7
- [4] 佐藤寛之, 相原研輔, グラスマン多様体上の商構造を用いたニュートン法 (Riemannian Newton's method on the Grassmann manifold exploiting the quotient structure), 日本応用数学会論文誌, 査読有, 28(4), 205–241, 2018.  
DOI: 10.11540/jsiamt.28.4\_205
- [5] M. Kawai, T. Shiohama, and H. Sato, Practically feasible recommender systems for cold start problems, *Proceedings of 2018 5th Asia-Pacific World Congress on Computer Science and Engineering (APWC on CSE)*, 査読有, to appear.
- [6] 佐藤寛之, 幾何学的な最適化アルゴリズムとその応用, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読なし, 2094, 55–64, 2018.  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2094.html>
- [7] 吉井和佳, 佐藤寛之, 坂東宜昭, 中村栄太, 河原達也, 独立低ランクテンソル分析: 非負値性・低ランク性・独立性に基づくブラインド音源分離の統一理論, 信学技報, 査読なし, 118(284), 37–44, 2018.  
<https://www.ieice.org/ken/paper/20181105I1He/>
- [8] H. Kasai, H. Sato, and B. Mishra, Riemannian stochastic recursive gradient algorithm, *Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning (ICML 2018)*, *Proceedings of Machine Learning Research*, 査読有, 80, 2521–2529, 2018.  
<http://proceedings.mlr.press/v80/kasai18a.html>
- [9] K. Sato and H. Sato, Structure preserving  $H^2$  optimal model reduction based on Riemannian trust-region method, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 査読有, 63(2), 505–512, 2018.  
DOI: 10.1109/TAC.2017.2723259
- [10] H. Kasai, H. Sato, and B. Mishra, Riemannian stochastic quasi-Newton algorithm with variance reduction and its convergence analysis, *Proceedings of the 21st International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS 2018)*, *Proceedings of Machine Learning Research*, 84, 査読有, 269–278, 2018.  
<http://proceedings.mlr.press/v84/kasai18a.html>
- [11] 佐藤寛之, 佐藤一宏, リーマン多様体上の最適化に基づく離散時間線形システム同定アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読なし, 2069, 153–165, 2018.  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2069.html>
- [12] K. Aihara and H. Sato, A matrix-free implementation of Riemannian Newton's method on the Stiefel manifold, *Optimization Letters*, 査読有, 11(8), 1729–1741, 2017.  
DOI: 10.1007/s11590-016-1090-9
- [13] H. Sato, Riemannian Newton-type methods for joint diagonalization on the Stiefel manifold with application to independent component analysis, *Optimization*, 査読有, 66(12), 2211–2231, 2017.  
DOI: 10.1080/02331934.2017.1359592
- [14] M. Kawai, T. Shiohama, and H. Sato, Supervised-topic-model-based hybrid filtering for recommender systems, *Proceedings of the 2nd International Conference on Big Data, Cloud Computing, and Data Science Engineering (BCD 2017)*, 査読有, 272–277, 2017.
- [15] H. Sato and K. Sato, Riemannian optimal system identification algorithm for linear MIMO systems, *IEEE Control Systems Letters*, 査読有, 1(2), 376–381, 2017.  
DOI: 10.1109/LCSYS.2017.2719163
- [16] 佐藤寛之, 笠井裕之, Bamdev Mishra, 直交制約つき最適化問題に対するリーマン多様体上の確率的分散縮小勾配法, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読なし, 2027, 135–143, 2017.  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2027.html>
- [17] 佐藤寛之, 相原研輔, 一般化シュティーフエル多様体上のレトラクションとその効果的な実装について, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読なし, 2027, 125–134, 2017.  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/2027.html>
- [18] 佐藤寛之, リーマン多様体上の最適化の理論と応用, 応用数理, 査読有, 27(1), 21–30, 2017.

DOI: 10.11540/bjsiam.27.1\_21

- [19] H. Sato and K. Sato, A new  $H^2$  optimal model reduction method based on Riemannian conjugate gradient method, *Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2016)*, 査読有, 5762–5768, 2016.  
DOI: 10.1109/CDC.2016.7799155

〔学会発表〕(計 37 件)

- [1] 佐藤寛之, 相原研輔, リーマン多様体上の最適化におけるレトラクションの理論と応用, 日本応用数学会 2019 年研究部会連合発表会, 2019 .
- [2] 佐藤寛之, リーマン多様体上の幾何学的な最適化手法とその応用, *Interaction between Pure and Applied Mathematics 2018*, 2018 .(依頼講演)
- [3] M. Kawai, T. Shiohama, and H. Sato, Practically feasible recommender systems for cold start problems, 5th Asia-Pacific World Congress on Computer Science and Engineering 2018 (APWC on CSE 2018), 2018 .
- [4] 吉井和佳, 佐藤寛之, 坂東宜昭, 中村栄太, 河原達也, 独立低ランクテンソル分析: 非負値性・低ランク性・独立性に基づくブライント音源分離の統一理論, 第 21 回情報論的学習理論ワークショップ (IBIS2018), 2018 .
- [5] 高柳俊, 佐藤寛之, 山下信雄, AdaGrad のリーマン多様体上への拡張について, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 関西支部 SSOR2018, 2018 .
- [6] 佐藤寛之, 佐藤一宏, Tobias Damm, 対称性を備えた連続時間線形システム同定に対するリーマン多様体上の最適化によるアプローチ, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2018 年秋季研究発表会, 2018 .
- [7] 佐藤寛之, 佐藤一宏, Tobias Damm, 幾何学的最適化に基づく対称性をもつ連続時間線形システムの新しい同定法, 日本応用数学会 2018 年度年会, 2018 .
- [8] 佐藤寛之, 笠井裕之, Bamdev Mishra, リーマン多様体上の確率的最適化の発展, RIMS 共同研究(公開型)「高度情報化社会に向けた数理最適化の新潮流」, 2018 .(招待講演)
- [9] H. Kasai, H. Sato, and B. Mishra, Riemannian stochastic recursive gradient algorithm, The 35th International Conference on Machine Learning (ICML 2018), 2018 .
- [10] H. Kasai, H. Sato, and B. Mishra, Stochastic recursive gradient on Riemannian manifolds, *Geometry in Machine Learning (GiMLi 2018)*, 2018 .
- [11] 佐藤寛之, 相原研輔, グラスマン多様体上の商構造に基づくニュートン方程式とその解法, 第 47 回数値解析シンポジウム, 2018 .
- [12] H. Kasai, H. Sato, and B. Mishra, Riemannian stochastic quasi-Newton algorithm with variance reduction and its convergence analysis, The 21st International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS 2018), 2018 .
- [13] 佐藤寛之, 相原研輔, グラスマン多様体上のニュートン方程式の水平空間での表現とその求解について, 日本応用数学会 2018 年研究部会連合発表会, 2018 .
- [14] K. Aihara and H. Sato, Solving a Newton equation on the Stiefel manifold with matrix-free Krylov subspace methods, 2018 SIAM Conference on Parallel Processing for Scientific Computing, 2018 .
- [15] H. Sato and K. Sato, Riemannian optimal system identification algorithm for linear MIMO systems, The 56th IEEE Conference on Decision and Control, 2017 .
- [16] 佐藤寛之, 幾何学的な最適化アルゴリズムとその応用, RIMS 共同研究(公開型)「数値解析学の最前線 - 理論・方法・応用 - 」, 2017 .(招待講演)
- [17] 佐藤寛之, 佐藤一宏, リーマン多様体上の最適化を用いた離散時間線形システム同定, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年秋季研究発表会, 2017 .
- [18] 佐藤寛之, 佐藤一宏, 幾何学的最適化に基づく離散時間線形システム同定アルゴリズム, 日本応用数学会 2017 年度年会, 2017 .
- [19] 佐藤寛之, 佐藤一宏, リーマン多様体上の最適化に基づく離散時間線形システム同定アルゴリズム, RIMS 共同研究(公開型)「数理最適化の発展: モデル化とアルゴリズム」, 2017 .
- [20] M. Kawai, T. Shiohama, and H. Sato, Supervised-topic-model-based hybrid filtering for recommender systems, 2nd International Conference on Big Data, Cloud Computing, and Data Science Engineering, 2017 .
- [21] 佐藤寛之, 幾何学的な最適化理論とその周辺, 芝浦工業大学システム理工学部数理科学科第 63 回談話会, 2017 .(依頼講演)
- [22] 佐藤寛之, 相原研輔, 一般化シュティーフェル多様体上の最適化におけるレトラクションについて, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2017 年春季研究発表会, 2017 .
- [23] H. Sato and K. Sato, A new  $H^2$  optimal model reduction method based on Riemannian conjugate gradient method, The 55th IEEE Conference on Decision and Control, 2016 .
- [24] H. Kasai, H. Sato, and B. Mishra, Riemannian stochastic variance reduced gradient on Grassmann manifold, The 9th NIPS Workshop on Optimization for Machine Learning, 2016 .
- [25] 佐藤寛之, 相原研輔, QR 分解に基づくシュティーフェル多様体上のレトラクションの一般

化について、日本応用数学会「行列・固有値問題の解法とその応用」研究部会第 22 回研究会、2016 .

- [26] 笠井裕之, 佐藤寛之, Bamdev Mishra, Riemannian stochastic variance reduced gradient (R-SVRG), 第 19 回情報論的学習理論ワークショップ (IBIS2016), 2016 .
- [27] 佐藤寛之, 笠井裕之, Bamdev Mishra, Riemannian stochastic variance reduced gradient for large-scale data applications, 2016 年電子情報通信学会ソサイエティ大会, 2016 .
- [28] 佐藤寛之, 笠井裕之, Bamdev Mishra, Riemannian stochastic variance reduced gradient and its convergence analysis, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2016 年秋季研究発表会, 2016 .
- [29] 佐藤寛之, 笠井裕之, Bamdev Mishra, SVRG 法のグラスマン多様体上への拡張とその行列補完問題への応用, 日本応用数学会 2016 年度年会, 2016 .
- [30] 相原研輔, 佐藤寛之, コレスキーQR 分解に基づく一般化シュティーフェル多様体上のレトラクション, 日本応用数学会 2016 年度年会, 2016 .
- [31] 笠井裕之, 佐藤寛之, Bamdev Mishra, Riemannian stochastic variance reduced gradient on Grassmann manifold, 第 15 回情報科学技術フォーラム, 2016 .
- [32] 佐藤寛之, 笠井裕之, Bamdev Mishra, Riemannian stochastic variance reduced gradient and its applications to machine learning, 2016 年度統計関連学会連合大会, 2016 .
- [33] 佐藤寛之, 笠井裕之, Bamdev Mishra, 直交制約つき最適化問題に対するリーマン多様体上の確率的分散縮小勾配法, 京都大学数理解析研究所研究集会「最適化技法の最先端と今後の展開」, 2016 .
- [34] 佐藤寛之, 相原研輔, 一般化シュティーフェル多様体上のレトラクションとその効果的な実装について, 京都大学数理解析研究所研究集会「最適化技法の最先端と今後の展開」2016 .
- [35] H. Kasai, H. Sato, and B. Mishra, Riemannian stochastic variance reduced gradient on Grassmann manifold, The Fifth International Conference on Continuous Optimization, 2016.
- [36] 笠井裕之, 佐藤寛之, Bamdev Mishra, Riemannian stochastic variance reduced gradient for large-scale machine learning, 電子情報通信学会 モバイルネットワークとアプリケーション研究会 (MoNA), 2016 . ( 奨励講演 )
- [37] 佐藤寛之, 非線形共役勾配法のリーマン多様体上への拡張とその応用について, 応用解析研究会 ~ 可積分系から計算数学まで ~ , 2016 .

[ その他 ]

ホームページ等

<http://www-optima.amp.i.kyoto-u.ac.jp/~hsato/>

## 6 . 研究組織

研究協力者氏名：相原 研輔

ローマ字氏名：(AIHARA, Kensuke)

研究協力者氏名：笠井 裕之

ローマ字氏名：(KASAI, Hiroyuki)

研究協力者氏名：佐藤 一宏

ローマ字氏名：(SATO, Kazuhiro)