

令和 2 年 7 月 14 日現在

機関番号：33302

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K17652

研究課題名（和文）有限グラフ上の感染過程の有限時刻分布の解明

研究課題名（英文）A study of finite-time distributions of infection processes on finite graphs

研究代表者

井手 勇介 (Ide, Yusuke)

金沢工業大学・基礎教育部・講師

研究者番号：70553999

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：ネットワーク（グラフ）上の感染過程や量子探索アルゴリズムを含む、有限グラフ上の確率的・量子的プロセスを統一的に理解するための方法の一つとして、それらの各種プロセスを規程する、グラフに付随する行列を解析するための枠組みを提供した。具体的には、Equitable partitionと呼ばれる、グラフの隣接関係による粗視化と、その粗視化に対応する基底を用いた各種プロセスの時間発展作用素（行列）の再構成法である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ネットワーク上で起こる感染症の広がりを理解するうえでも、あるいは、量子探索の効率性を議論するうえでも、個々のケースに特化した解析を進める一方で、ネットワーク（グラフ）の持つ特徴とそれぞれをモデル化したプロセスの挙動との関係を理解する必要がある。本研究で提案したグラフの隣接関係による粗視化と、その粗視化に対応する基底を用いた各種プロセスの時間発展作用素（行列）の再構成法をベースとして、研究対象となる各種プロセスを俯瞰することによって、ネットワーク上の各種プロセスに対する理解が深まり、実問題への対応策を考える際の一助となることが考えられる。

研究成果の概要（英文）：We developed a method to analyse matrices which define stochastic and/or quantum processes on graphs. This method provides "unified perspective" to understand stochastic and/or quantum processes on graphs. More specifically, our method provides "coarse graining" of given graphs and corresponding time evolution operator of the process on it by using so-called equitable partition.

研究分野：確率論，量子ウォーク，ネットワーク科学

キーワード：確率過程 量子課程 量子探索 量子ウォーク 感染課程

## 1. 研究開始当初の背景

サイバー空間では、官公庁や一般企業が管理する大量の個人情報、コンピュータウイルスの感染等により、流出する事態が度々起きている。また、自然界では、SARS・インフルエンザ等の感染症が流行し、生命を脅かす事態も度々起きている。一見異なるこれらの「感染」は、通信網・企業間取引・人間関係・交通網等の現実に存在するネットワークを通じて広がるという共通点を持つ。現実のネットワーク上で起きる感染の拡大を防ぐためには、現実のネットワークの理解と、その上で起こる感染の理解が不可欠である。このような社会的要請に応えるかのように、現実のネットワークが持つ、様々な特徴量を取り入れた理論的モデルを構築し、解析することによって、現実のネットワークに対する理解を深めようとする、複雑ネットワーク (complex networks) と呼ばれる研究分野は、この 20 年ほどで急速に発展してきている。

複雑ネットワークの研究が盛んに行われ始めた段階の研究では、現実のネットワークやネットワークモデル自身の特徴、例えば次数分布(各頂点に隣接する辺の本数の分布)がべき分布に従うこと(スケールフリー性)や、クラスター係数(各頂点に隣接する頂点ペア全体のうち、頂点ペアが隣接している頂点ペアの割合)がそれほど大きくならず、頂点間距離が短いこと(スモールワールド性)などが調べられてきた。このような、ネットワーク自身の持つ構造を明らかにする研究と平行して、ネットワーク上の感染症の伝播を解析する研究も盛んに行われている。

現実のネットワーク上で起きる感染の拡大を防ぐためには、現実のネットワークの理解と、その上で起こる感染の理解が不可欠である。ネットワーク上の感染症の数学的モデルの重要なクラスの 1 つにコンタクトプロセス(SIS モデル)があり、コンタクトプロセスが、ネットワークの構造に応じてどのような挙動を示すかという課題に対して、次数を考慮した平均場近似を用いることで感染率に関する臨界値を次数分布の性質で特徴付ける研究がなされていた。次数を考慮した平均場近似に関して、その妥当性は議論を呼んだが、完全グラフ上の各頂点に独立同分布な確率変数を重みとして配置し、その重みの積によって感染率を決定するモデルについては、理論を数学的に肯定する論文が 2011 年に出版された。

有限サイズのグラフ(ネットワーク)上のコンタクトプロセスは、全ての頂点が健康な状態が吸収状態となるために、全ての頂点が感染している状態から出発しても、確率 1 で有限時間内に全ての頂点が健康な状態になることが定義よりわかる。しかしながら、現実のネットワーク上の感染の拡大を議論する際には、感染の持続時間や感染している時間帯での感染の規模に関する情報が必要となる。先行研究では、感染率の臨界値を境にして、感染率が小さい場合には総頂点数の対数オーダーの時間内で全ての頂点が健康な状態になり、感染率が大きい場合には、総頂点数の指数オーダーの時間が経過しても感染した状態にある頂点が残っていることが示された。さらに、感染している時間帯では、各頂点の感染確率が次数を考慮した平均場近似で計算される定常分布で非常に良く近似されることが示され、感染の持続時間や感染規模に関する情報が得られている。

## 2. 研究の目的

WEB や電子メールを介して拡散するコンピュータウイルスや、人的ネットワークを介して拡散する伝染病等に代表される、現実ネットワーク上の感染症は社会生活に重大な影響を及ぼすため、感染拡大防止策が必要である。本研究では、現実ネットワーク上の感染症をモデル化した数学モデルである、コンタクトプロセスに代表される各種感染過程について、有限時刻での挙動を理論的に明らかにすることを目的とする。但し、現実ネットワークとの対応関係をはっきりさせるために、主な研究対象として有限グラフ上の感染過程を想定し、ネットワークポロジと感染過程の挙動との相関を明らかにすることで、現実ネットワーク上の感染拡大防止策を議論するための理論的枠組みを与えたい。

## 3. 研究の方法

先行研究では、コンタクトプロセスにおける各頂点の感染確率を評価するために、分枝過程と呼ばれる確率過程を用いている。ここで、コンタクトプロセスでは、健康な状態の頂点は、隣接する感染した頂点から独立に一定のレートのランダムな(ポアソン過程に従う)待ち時間の後に感染させられるのに対し、分枝過程では、健康な状態かどうかに関わらず、各頂点には隣接する感染した頂点から独立に一定のレートのランダムな(ポアソン過程に従う)待ち時間の後に感染した「粒子」が新たに生み出され、感染しているそれぞれの「粒子」はそれぞれ独立にあるレート 1 のランダムな(ポアソン過程に従う)待ち時間の後に健康な状態に変化する確率過程である。従って、分枝過程の感染している「粒子数」は常にコンタクトプロセスの感染頂点数を上から抑えることになる。

この事実より、コンタクトプロセスにおける、全ての頂点が健康な状態になる時刻の上界は、対応する分枝過程において、感染している粒子が無くなる時刻(絶滅時刻)で与えられる。この絶滅時刻は、コンタクトプロセスの感染率によって存在する場合と存在しない場合があるが、

先行研究では、グラフの隣接行列の最大固有値が0となることをもって感染率の臨界値を特徴付け、臨界値よりも小さな感染率を持つ(劣臨界的な)コンタクトプロセスに対応する分枝過程が、総頂点数の対数オーダーの絶滅時刻を持つことを示している。この場合の証明は、一般のグラフ上のコンタクトプロセスに対しても適用可能と考えられるため、本研究でも同様の手法の援用を検討した。

一方、臨界値よりも大きな感染率を持つ(優臨界的な)コンタクトプロセスについては、総頂点数の対数オーダーより長い時間だけ感染が持続する可能性があるため、各頂点の感染確率が時間と共にどのように推移するかを見積もる必要がある。分枝過程の各頂点における粒子の生存確率は、常にコンタクトプロセスの各頂点の感染確率を上から抑えるため、優臨界的なコンタクトプロセスに対しても分枝過程に対する評価は有効であると考えられる。さらに、先行研究では、完全グラフ上の各頂点に独立同分布な確率変数を重みとして配置し、その重みの積によって感染率を決定するモデルに対しては、平均場近似によって得られる、コンタクトプロセスの各頂点の感染確率の定常分布と分枝過程の各頂点における粒子の生存確率が一致することを示すことで、平均場近似で計算される定常分布を用いてコンタクトプロセスの各頂点の感染確率の上からの評価を得ている。本研究においては、一般論として分枝過程の各頂点における粒子の生存確率を、コンタクトプロセスの各頂点の感染確率の上界と考えた。

次に、優臨界的なコンタクトプロセスの各頂点の感染確率に対する下からの評価について述べる。先行研究では、同じ重みを持つ頂点をグループ化し、大数の強法則・大偏差原理を用いながら、感染頂点数を下から抑える連続時間ランダムウォークを構成することによって、各頂点の感染確率の下からの評価を得ている。この結果によれば、予め定めた任意の誤差  $> 0$  に対して、総頂点数の指数オーダーの時間までは確率1で、各頂点の感染確率は下から「平均場近似で計算される定常分布」で一様に抑えられる。つまり、上からの評価も合わせて、各頂点の感染確率は平均場近似で計算される定常分布で良く近似されることになる。先行研究の証明では、この論文で扱っているモデルに特化した手法で議論が進められているが、分枝過程の各頂点における粒子の生存確率の性質を用いて一般論を構築できる可能性があるため、本研究では、分枝過程の各頂点における粒子の生存確率を用いて、優臨界的なコンタクトプロセスの各頂点の感染確率に対する下からの評価を検討した。

#### 4. 研究成果

当初の目的の一つであった、コンタクトプロセスの有限時刻での挙動について、先行研究で議論された手法の一般論への拡張については、図書2にまとめたが論文発表には至らなかった。しかしながら、本研究期間中にコンタクトプロセスに代表される各種感染過程を含む、隣接関係が本質的にその挙動に影響する確率的・量子的プロセスに対して統一的に理解するための足がかりとなる研究が進んだので、以下でその成果について説明する。

ネットワーク(グラフ)上の各種プロセスはグラフの隣接関係によって規定されるものが多い。特に、有限グラフ上の各種プロセスについては、Graph Laplacian や隣接行列等の良い性質を持ったグラフに付随する行列の固有値・固有ベクトルが、その挙動を調べるための重要な情報を持つことが多い。

「Choon-Lin Ho, Yusuke Ide, Norio Konno, Etsuo Segawa, Kentaro Takumi, A spectral analysis of discrete-time quantum walks related to birth and death chains, Journal of Statistical Physics, Vol.171, pp.207-219, (2018).」では、グラフ上の量子的プロセスの一つである離散時間量子ウォークについて、特に、Path グラフと呼ばれる一次元格子の有限部分グラフ上では、その時間発展を定めるユニタリ行列の固有値・固有ベクトルが、対応する通常のランダムウォークの推移確率行列の固有値・固有ベクトルと直接的に繋がることで、それらの挙動を比較可能であることを示した。その議論の中で、直交多項式論が本質的な役割を果たしていることも注目に値すると考えられる。

「井手勇介, 今野紀雄, 量子ウォークによる高速探索, 日本物理学会誌, Vol.74, 10号, 「解説」, pp.682-690, (2019).」と「Yusuke Ide, Partition of graphs and quantum walk based search algorithms, Nonlinear Theory and Its Applications, Vol.10, No.1, pp.16-27, (2019).」では、量子ウォークによる量子探索アルゴリズムについて、その挙動を統一的に理解するための方法について提案し、その具体例を示している。量子ウォークによる量子探索アルゴリズムについては、2000年頃から様々なグラフ上での挙動が調べられてきている。今回の研究では、グラフ毎に調べられてきた性質について、グラフの隣接関係に注目して統一的に理解する方法を整理した。その方法は Equitable partition と呼ばれる、グラフの隣接関係による粗視化と、その粗視化に対応する基底を用いた時間発展作用素の再構成法である。この手法によって、プロセスの挙動を調べるために必要な空間次元を必要な大きさに縮小できるため、ターゲットを絞って議論を進めることができる。具体例では、量子探索でよく知られた結果が、整理された形で導出可能なことを示している。さらに細かい議論等については、「今野紀雄, 井手勇介(共編著), 量子ウォークの新展開 -数理構造の深化と応用-, 執筆者21名, 井手執筆箇所「連続時間量子ウォークの固有解析」 pp. 180-199, 培風館, 2019年8月27日。」の中にも記述している。

上述の Equitable partition による粗視化と,その粗視化に対応する基底を用いた時間発展作用素の再構成法は,量子ウォークに特化した手法ではなく,本研究の研究対象であるコンタクトプロセスや通常のランダムウォークのような,隣接関係に基づく他の確率的・量子的プロセスに対しても有効であることがわかってきたため,その結果について「井手勇介, グラフの分割と単純ランダムウォーク・量子ウォーク探索, 電気学会第 76 回情報システム研究会, 2018 年 11 月 9 日, 金沢学院大学サテライト教室.」で予稿とともに発表し,その内容も含めた論文を準備しているところである.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件／うち国際共著 3件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ide Yusuke	4. 巻 10
2. 論文標題 Partition of graphs and quantum walk based search algorithms	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE	6. 最初と最後の頁 16～27
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1587/nolta.10.16">https://doi.org/10.1587/nolta.10.16</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Ide Yusuke, Konno Norio, Matsutani Shigeki, Mitsuhashi Hideo	4. 巻 383
2. 論文標題 New theory of diffusive and coherent nature of optical wave via a quantum walk	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annals of Physics	6. 最初と最後の頁 164～180
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aop.2017.05.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Konno Norio, Ide Yusuke, Sato Iwao	4. 巻 545
2. 論文標題 The spectral analysis of the unitary matrix of a 2-tessellable staggered quantum walk on a graph	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 207～225
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.laa.2018.01.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ho Choon-Lin, Ide Yusuke, Konno Norio, Segawa Etsuo, Takumi Kentaro	4. 巻 171
2. 論文標題 A Spectral Analysis of Discrete-Time Quantum Walks Related to the Birth and Death Chains	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 207～219
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10955-018-1998-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yusuke Ide, Hirofumi Izuhara, Takuya Machida	4. 巻 457
2. 論文標題 Turing instability in Reaction-Diffusion models on complex networks	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Physica A	6. 最初と最後の頁 331-347
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.03.055">https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.03.055</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Xin-Ping Xu, Yusuke Ide	4. 巻 373
2. 論文標題 Exact solutions and symmetry analysis for the limiting probability distribution of quantum walks	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Annals of Physics	6. 最初と最後の頁 682-693
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) <a href="https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.08.019">https://doi.org/10.1016/j.aop.2016.08.019</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Toshiyuki Arai, Choon-Lin Ho, Yusuke Ide, Norio Konno	4. 巻 62
2. 論文標題 Periodicity for space-inhomogeneous quantum walks on the cycle	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Yokohama Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 39-50
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 井手勇介, 今野紀雄	4. 巻 74
2. 論文標題 量子ウォークによる高速探索	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 日本物理学会誌	6. 最初と最後の頁 682-690
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11316/butsuri.74.10_682	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 グラフの分割と単純ランダムウォーク・量子ウォーク探索
3. 学会等名 電気学会情報システム研究会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井手勇介, 林幸雄
2. 発表標題 グラフ上のランダムウォークの到達時刻評価
3. 学会等名 第15回ネットワーク生態学シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yusuke Ide
2. 発表標題 Graph partition and quantum walk search
3. 学会等名 The 8th Workshop on Quantum Simulation and Quantum Walks (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 量子完全状態遷移と量子探索
3. 学会等名 Workshop on Quantum Walks at SPring-8 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Ide
2. 発表標題 Spectral analysis for discrete-time quantum walks on the path
3. 学会等名 International Conference on Computational Modeling and Simulation (ICCMS) 2017, Special Session on Quantum Computation and Quantum Information (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 連続時間量子ウォークと量子探索
3. 学会等名 ドレスト光子・光合成・量子ウォーク
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 path上の離散時間量子ウォークの固有解析
3. 学会等名 IMI短期共同研究「レーザー同位体分離の実用化における量子ウォークの数理」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 連続時間量子ウォークとグラフ構造
3. 学会等名 オペレーションズ・リサーチ学会研究部会「確率モデルとその応用」第22回研究会(招待講演)
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 グラフのmodular partitionと量子ウォークの解析
3. 学会等名 第2回グラフゼータと量子ウォークの諸相
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 右田正夫, 井手勇介
2. 発表標題 スワームシステムにおけるネットワークの生成過程
3. 学会等名 ロボティクス・メカトロニクス講演会2016 in Yokohama
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 円環上の離散時間量子ウォークの周期性
3. 学会等名 グラフゼータと量子ウォークの諸相
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 2-step 離散時間量子ウォークの固有分解
3. 学会等名 量子ウォークの代数的考察と光学との融合
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 はじめに
3. 学会等名 日本物理学会第72回年次大会シンポジウム「量子ウォークの深化とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 グラフ分割と固有解析を用いた量子ウォーク探索の解析
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型)量子ウォークとスペクトル散乱理論の数理
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 井手勇介
2. 発表標題 グラフ分割と固有解析による連続時間量子ウォーク探索の解析
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yusuke Ide
2. 発表標題 Introduction to Continuous Time Quantum Walk Search
3. 学会等名 The 20th Asia Pacific Industrial Engineering And Management Systems
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 井手勇介, 今野紀雄
2. 発表標題 量子ウォークの極限分布に付随する直交多項式と対応するランダムウォークについて
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 井手勇介, 竹内幸雄	4. 発行年 2017年
2. 出版社 慶應義塾大学	5. 総ページ数 137
3. 書名 不動点定理の話題 コンタクトプロセスの最近の話題	

1. 著者名 今野紀雄, 井手勇介 (共編著)	4. 発行年 2019年
2. 出版社 培風館	5. 総ページ数 321
3. 書名 量子ウォークの新展開 -数理構造の深化と応用-	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<a href="https://kitap01.kanazawa-it.ac.jp/researcherdb/gyouseki/Index/G1BJAAF_0001.html">https://kitap01.kanazawa-it.ac.jp/researcherdb/gyouseki/Index/G1BJAAF_0001.html</a>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----