

令和元年6月15日現在

機関番号：12701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K21039

研究課題名(和文) 時間的・空間的に相互作用をもつ格子確率モデルの極限定理の研究

研究課題名(英文) Limit theorems for stochastic models on lattices with spatio-temporal interactions

研究代表者

竹居 正登 (TAKEI, Masato)

横浜国立大学・大学院工学研究院・准教授

研究者番号：60460789

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：パーコレーション問題は、スポンジのような多孔質の物体への流体の浸透現象のモデルとして研究が始められ、現在ではランダムな図形の解析・研究において最も基本的な確率モデルと位置づけられている。このモデルの研究を深めるとともに、それを通じて得られた経験を生かして、ランダムウォーカーの軌跡の特徴とその極限挙動に及ぼす影響を極限定理の形で定量化することを目的として研究を推進した。磁性体のモデル等の相互作用のある系におけるパーコレーション問題、(確率)セルオートマトン、過去の履歴から影響を受けるランダムウォーク等について様々な形の極限定理を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

空間構造をもった確率モデルは、物理・化学・生物現象の研究においてのみならず、人々の意見が合意に達するか否かといった社会現象の研究等においても重要な役割を果たしており、多様な現象のモデル構築と解析を可能にすることが求められている。本研究では、浸透現象の数学的解析における様々な着想を基盤とし、記憶があり学習しながら歩むランダムウォーク等に関する成果を得て、この方面の研究に一定の寄与をした。

研究成果の概要(英文)：Percolation process was originally introduced as a model of penetration of fluids into porous media. Nowadays it is one of the most fundamental stochastic models concerning random geometry. From the viewpoint of percolation theory, we studied limit theorems for several stochastic models with spatio-temporal interactions. We obtained several kinds of limit theorems for Ising percolation, (stochastic) cellular automata, random walks with memory effect, and so on. Among others we briefly describe our result on reinforced random walks: Consider a graph, and assign weight one to each edge. The walker jumps to one of the neighboring vertices with probability proportional to weight of the edge connecting them. After crossing an edge, its weight is increased by one. If the underlying graph is a b -regular tree with $b>1$, then the walker returns to the starting point only finitely many times with probability one. We obtain a limit theorem describing the trajectory of the walker for $b>3$.

研究分野：確率論

キーワード：パーコレーション ランダムウォーク セルオートマトン 量子ウォーク

1. 研究開始当初の背景

空間構造をもった確率モデルは、物理・化学・生物現象の研究においてのみならず、人々の意見が合意に達するか否かといった社会現象の研究等においても重要な役割を果たしており、多様な現象のモデル構築と解析を可能にすることが求められていた。様々なモデルが提案され、数値計算と発見的議論による研究が国内外で多数行なわれている一方で、単純に見えるモデルであっても数学的に厳密な取り扱いがしばしば困難を伴うため、新たな局面を切り開く研究が望まれていた。パーコレーションは、ランダムな図形の解析・研究において最も基本的な確率モデルと位置づけられ、この問題を基軸として種々の確率モデルの数学的研究を推進することが極めて重要であると考えていた。

2. 研究の目的

パーコレーション問題は、スポンジのような多孔質の物体への流体の浸透現象のモデルとして研究が始められた。大きく分けて次の2つの設定がある：格子点(サイト)ごと、独立に確率 p で通過可能 / 確率 $1-p$ で通過不可能とするサイト問題と、格子点をつなぐ辺(ボンド)に対して通過可能性を考えるボンド問題である。通過可能な点や辺によって、格子はいくつかの連結成分(クラスター)に分けられる。パラメータ p を変化させたとき、特別な値 p_c を境にクラスターの図形的特徴が劇的に変化する。

相互作用をもつ粒子が格子上に配置されている系で同様の問題を考えることができる：統計力学の磁性モデルの1つである Ising モデルにおいては、低温では磁性が生じ、高温になると磁性を失うという相転移がある。2次元の場合、ランダムなスピン配置においてパーコレーションが起こるか否かに完全に対応している。一方、自己の軌跡が推移確率に影響を与える確率過程は、過去の履歴から受ける相互作用の強さによって極限挙動が大きく変化することがある。ランダムな図形に関する確率論としてのパーコレーション問題の研究をさらに掘り下げ、その視点を生かしてランダムウォーカーの軌跡の特徴とその極限挙動に及ぼす影響を極限定理の形で定量化することを目的とした。

3. 研究の方法

時間的・空間的に相互作用の生じる確率モデルについて、パーコレーションの視点を生かして研究を進めた。

(i) 2次元 Ising モデルの高温相について、系のもつ空間的な混合性(漸近的な独立性)を活用してパーコレーション問題の臨界現象の研究を行ない、元来の独立なパーコレーション問題についての再検討も加えながら、浸透領域の図形的な性質を記述する精密な極限定理を得ることを目指して研究した。

(ii) 1次元線形オートマトン及びこれにランダムなエラーを付加した場合の不変分布・極限分布について、フーリエ解析を用いて調べるとともに、この写像の時空パターンに現れるフラクタル図形と関連させつつ研究した。

(iii) 時間的に相互作用のある確率モデルとして、強化ランダムウォーク(ウォーカーがグラフの各辺に与えられた重みに比例した確率で推移し、ウォーカーが通った辺の重みを増加させるモデル)を中心に据えて研究を行なった。一例として「ランダムな媒質の悪い部分がパーコレーションを起こす確率は低い」といった着想を生かして計算を進めた。

(iv) 過去の履歴から影響を受けるランダムウォークの別な種類のモデルとして Elephant Random Walk や量子ウォーク等にも視野を広げて関連する諸問題を考察し、研究の総合的な推進に努めた。

4. 研究成果

(1) 空間的に相互作用のある確率モデルとして、2次元 Ising モデルの高温相におけるパーコレーション問題を研究した。独立なパーコレーション問題の場合に Kesten (1986)により構成された incipient infinite cluster (IIC)は、既に Higuchi, Kinoshita, Takei, Zhang (2014)によって2次元 Ising モデルの場合に拡張されている。そこで、Aizenman (1997)により提案された、臨界点における正方形領域の spanning cluster の図形的性質を研究し、その大きさが Kesten の IIC の場合と同じオーダーになることを示す極限定理を証明した。臨界点における「大きなクラスター」には種々の定義があり、これら相互の性質を比較する研究が次の段階となる。

(2) 極限定理の精密化の計画については、空間的に相互作用のある場合予想を超える困難があることが分かり、相互作用のないパーコレーション問題に立ち戻って考察することとした。Y.C. Zhang (1999)は2次元正方格子の正方形領域における一番低い横断路の通る頂点の最大高さの期待値について調べた。優臨界的な場合の結果は改良の余地を残していたが、この場合の正しいオーダーを求めることができた。さらに、最大高さの実現値と期待値との比が1に確率収束

することも示すことができた。この量に関する結果は2次元 Ising モデルの高温相におけるパーコレーション問題をはじめ相互作用のある場合にも拡張できる見通しがたっており、論文としてまとめる作業を進めている。

(3) パーコレーションと関連する副次的テーマとして考察を進めてきた(確率的)セルオートマトンに関しては3件の原著論文を発表することができた。Miyamoto (1979, 1994)の定理を拡張・一般化し、パスカルの三角形における剰余と関係する1次元線形セルオートマトンに対する極限分布の存在に関する結果と、種々の1次元線形セルオートマトンに加法的なエラーを付加したときのエルゴード性に関する結果を得た。

(4) 時間的に相互作用のある確率モデルとして、強化ランダムウォークについて研究を行なった。b本ずつ枝分かれする木グラフの上での線型強化ランダムウォーク(ウォーカーが通った辺の重みを毎回1ずつ増やすモデル)について、ウォーカーの位置のゆらぎを表す曲線の分布をBrown運動によって近似する関数型中心極限定理をbが4以上の場合に証明することができた。これは Collevecchio (2006)がbが十分大きい場合に得ていた結果を改良・拡張するものである。ランダム環境中のランダムウォークと呼ばれるより広い枠組みでこの問題を取り扱っており、関数型中心極限定理が得られるための十分条件を与えている。この成果は論文にとりまとめて学術雑誌に投稿した。

(5) 半直線上の非線型な強化ランダムウォークのうち、Davis(1989)により最初に考察された、初期状態での再帰性が弱く、原点に戻る方向に辺を横断したときのみ重みを増やす場合におけるウォーカーの極限挙動について研究した。重みの増やし方が横断回数のベキの関数で与えられる場合、そのベキ指数に応じて再帰的・非再帰的・局在化の3つの相が現れうることを証明した。この成果は論文にとりまとめて学術雑誌に投稿した。

(6) 頂点強化型ランダムウォークについては、完全2部グラフの上でのモデルにおいて進展があり、1粒子の場合には重みの増やし方と極限挙動との対応を完全に解明することができた。さらに、他粒子の場合について、一定の条件のもとで全ての粒子が同じひとつの辺に集まる確率が1となることが分かった。ただ、この条件は期待されるものよりはるかに強いため、より弱い条件のもとでの証明が課題として残った。

(7) 記憶をもつランダムウォークの別な種類のモデルとして、Schütz and Trimper (2004)により導入された Elephant Random Walk に関する極限定理の研究を並行して進めた。特筆すべき成果としては、記憶のパラメーターが大きい場合にもある意味で中心極限定理が成立することを示し、極限挙動をより具体的に記述できるようになった。通常モデルより広いクラスに適用できる形で証明をまとめ、論文として投稿する準備をしているところである。

(8) 至る所微分不可能な連続関数の有名な例である高木関数を一般化して得られる連続関数のクラスにおいて、極限関数への収束の速さを調べる際に Elephant Random Walk の場合と似た構造があることに気づき、典型的な点における収束の速さを大数の法則や中心極限定理といった確率論の極限定理を用いて記述する研究を開始して一定の成果が得られている。論文を準備しているところである。

(9) 過去の履歴に依存する確率過程の問題と関連した副次的テーマである量子ウォークについては、1件の原著論文が出版された：最も基本的で重要なアダマール・ウォークをサイクルの上で考えたとき、どのような周期性が生じうるかを完全に解明した。

<引用文献>

- Michael Aizenman, On the number of incipient spanning clusters, Nuclear Physics B, Vol. 485, 1997, pp. 551-582
- Andrea Collevecchio, Limit theorems for reinforced random walks on certain trees, Probability theory and related fields, Vol. 136, 2006, pp. 81-101
- Burgess Davis, Loss of recurrence in reinforced random walk, Almost Everywhere Convergence, 1989, pp. 179-188
- Yasunari Higuchi, Kazunari Kinoshita, Masato Takeji and Yu Zhang, Incipient infinite cluster in 2D Ising percolation, Markov Processes and Related Fields, Vol. 20, 2014, pp.173-182
- Harry Kesten, The incipient infinite cluster in two-dimensional percolation, Probab. Theory Related Fields, Vol. 73, 1986, pp. 369-394
- Munemi Miyamoto, An equilibrium state for a one-dimensional life game, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 19, 1979, pp.525-540
- Munemi Miyamoto, Stationary measures for automaton rules 90 and 150, J. Math. Kyoto Univ., Vol. 34, 1994, pp. 531-538.

G. M. Schütz and S. Trimper, Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk, Phys. Rev. E, Vol. 70, 2004, 045101
Yi-Ci Zhang, The width of the lowest horizontal open crossing of $[0, n]^2$ for 2D-percolation, Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), Vol. 42, 1999, pp. 611-616

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 6 件)

竹居 正登, 1次元線形セルオートマトンの極限挙動、第33回待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」報文集、査読無、2017、pp. 11-18

Norio Konno, Yuki Shimizu, and Masato Takei, Periodicity for the Hadamard walk on cycles, Interdisciplinary Information Sciences, 査読有、Vol. 23, 2017、pp. 1-8

DOI: 10.4036/iis.2017.A.01

Masato Takei, A remark on the paper 'Sieve of war: the legacy of Jitsuro Nagura' by Daniel Tisdale, BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 査読有、Vol. 32, 2017, p. 170

DOI: 10.1080/17498430.2017.1281030

Ryouta Kouduma and Masato Takei, On the ergodicity of one-dimensional linear cellular automata with additive error, Proceedings of 4th International Workshop on Applications and Fundamentals of Cellular Automata (AFCA'16), held in conjunction with CANDAR'16, regular paper, 査読有、2016、pp. 222-228

DOI:10.1109/CANDAR.2016.0047

Masato Takei, On limiting measures for a class of one-dimensional linear cellular automata, Proceedings of 4th International Workshop on Applications and Fundamentals of Cellular Automata (AFCA'16), held in conjunction with CANDAR'16, regular paper, 査読有、2016、pp.236-242

DOI:10.1109/CANDAR.2016.0049

Masato Takei, Limiting measures for addition modulo a prime number cellular automata, International Journal of Networking and Computing, 査読有、Vol. 7, 2017、pp.124-135

DOI: 10.15803/ijnc.7.2_124

[学会発表](計 15 件)

Masato Takei, On limiting measures for a class of one-dimensional linear cellular automata, 4th International Workshop on Applications and Fundamentals of Cellular Automata (AFCA'16), held in conjunction with CANDAR'16, 2016

Ryouta Kouduma and Masato Takei, On the ergodicity of one-dimensional linear cellular automata with additive error, 4th International Workshop on Applications and Fundamentals of Cellular Automata (AFCA'16), held in conjunction with CANDAR'16, 2016

竹居 正登, 1次元強化ランダムウォークの極限挙動、研究集会「公的大規模データの利用におけるプライバシー保護の理論と応用」、2016

竹居 正登, 1次元線形セルオートマトンの極限挙動、第33回(2016年度)待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」、2017

竹居 正登, 1次元線形セルオートマトンの極限挙動について、Workshop「数論とエルゴード理論」、2017

竹居 正登, Limiting measures for one-dimensional linear cellular automata, 新潟確率論ワークショップ、2017

石川 智啓, 竹居 正登, 完全2部グラフ上の vertex-reinforced random walks, 日本数学会秋季総合分科会、2017

竹居 正登, Elephant random walk の極限定理について、新潟確率論ワークショップ、2018

Masato Takei, On the width of the lowest horizontal crossing in 2D-percolation, 研究集会"Topics in Probability Theory", 2018

那須 笑梨奈, 竹居 正登, 2次元パーコレーションにおける lowest horizontal crossing の幅について、日本数学会秋季総合分科会、2018

Masato Takei, Topics on a class of probabilistic cellular automata related to percolation, RIMS 共同研究(グループ型) "Recent Progress in Ergodic Theory", 2018

Masato Takei, Limiting behavior of reinforced random walks on trees, RIMS 共同研究(グループ型) "Recent Progress in Ergodic Theory", 2018

Masato Takei, Limiting measures for a class of one-dimensional probabilistic cellular automata, 7th Monash-Ritsumeikan Symposium on Probability and Related Fields,

2018

竹居 正登、高木クラスの関数における収束の速さについて、新潟確率論ワークショップ、2019

竹居 正登、Elephant random walk の優臨界相における極限定理、慶應確率論ワークショップ 2019、2019

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

横浜国立大学 研究者総覧
https://er-web.ynu.ac.jp/html/TAKEI_Masato/ja.html

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号(8桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：赤堀 次郎

ローマ字氏名：AKAHORI, Jiro

研究協力者氏名：コレヴェッキオ, アンドレア

ローマ字氏名：COLLEVECCHIO, Andrea

研究協力者氏名：石川 智啓

ローマ字氏名：ISHIKAWA, Tomohiro

研究協力者氏名：上妻 遼太

ローマ字氏名：KOUJUMA, Ryouuta

研究協力者氏名：久保田 直樹
ローマ字氏名：KUBOTA, Naoki

研究協力者氏名：那須 笑梨奈
ローマ字氏名：NASU, Erina

研究協力者氏名：大坂 翔人
ローマ字氏名：OSAKA, Shoto

研究協力者氏名：植松 勇馬
ローマ字氏名：UEMATSU, Yuma

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。