

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K21115

研究課題名(和文) 正規言語の所属問題への副有限モノイドと擬ガロア圏の構造論の応用

研究課題名(英文) Study of the structure of semigalois categories and profinite monoids and its application to regular languages

研究代表者

浦本 武雄 (Uramoto, Takeo)

京都大学・高等研究院・研究員

研究者番号：40759726

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：正規言語の分類理論であるEilenberg理論を公理化し、その整数論への応用例を見つけた。特にBorgerが定義した意味でのWitt vectorに対するChristolの定理の類似を証明した。その後、この定理の続編としてBostとConnesによって導入されたBost-Connes系というC*力学系の数論的部分代数とWitt vectorのなす代数が同型であることを観察している。このことから、Witt vectorをmodular関数の変形族の特殊値によって実現できるだろうことを示唆を得て、それに関する観察を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

正規言語の分類理論であるEilenberg理論は元々形式言語理論における一分野でしかなかったが、その圏論的公理化によって、応用範囲が広がった。特に整数論に対する応用があったことは、さらなる研究の方向性を示唆しており、このEilenberg理論と整数論の繋がりはそれ自体で一つの研究領域になりうる。中でも古典的な類体論に対して新しい見方を与えることができたことが最も意味があるように思われる。この観察によって古典類体論の新しい非可換拡張の方向性も示唆されているように思う。

研究成果の概要(英文)：In this research we studied an axiomatization of Eilenberg theory, which classically concerns classifications of regular languages, finite monoids, and finite automata. We proved that this theory can be axiomatized in terms of the duality theory of semigalois categories, which clarified that this theory is essentially an extension of classical galois theory. After this axiomatization, we further studied an application of this theory to number theory. In particular, we proved an arithmetic analogue of Christol's theorem and related this theorem to the theory of semigalois categories. Moreover, we further studied Bost-Connes' C* dynamical systems, and proved that the algebra of integral Witt vectors gives an arithmetic subalgebra of the system. This suggests that Witt vectors can be realized by special values of certain deformation families of modular functions, on which we also obtained certain observations.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：semigalois category Witt vector duality class field theory automaton regular language profinite monoid

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

正規言語とは有限オートマトンによって受理される言語のことを言い、正規言語の階層の分類理論が1960年代から発展してきていた。それを代数的言語理論あるいは Eilenberg 理論と呼ぶ。Eilenberg 理論では正規言語の組合せ論的問題を解決するために、それに対応する統語的モノイドを用いる。統語的モノイドは正規言語に対して常に有限モノイドであり、その積表を計算するアルゴリズムが存在している。この統語的モノイドを使って、正規言語の問題を解決する研究が長らく成功しており、形式言語の階層の分類理論としては理想的なものの一つであった。

そのため Eilenberg 理論の何らかの拡張や整備が望まれていた。実際、本研究を開始した時、正規言語の分類理論である Eilenberg 理論に対する双対定理による新しい定式化の研究が議論されていた。特に2008年から本研究開始の2016年までには、様々な枠組みが提案されており、主要国際会議で議論が続いていた。

この研究文脈において、私の研究では Eilenberg 理論にガロア理論と同様の理論形式を与えることに成功し、正確な意味で Eilenberg 理論は Galois 理論の拡張と見なせることを証明した。これによって古典的な Eilenberg 理論や副有限モノイドの研究に、新しい枠組みを与えることができ、その先の研究を与える必要があると認識して、本研究を開始した。

2. 研究の目的

本研究の目的は大まかに言って、Eilenberg 理論の新しい枠組みとして導入した semigalois 圏の理論の何らかの応用を与えることだった。特に semigalois 圏の幾何学的な例を構成することを一つの大きな目標としていた。

Semigalois 圏の特殊ケースである galois 圏は、体の上の分離代数の圏、位相空間上の有限被覆空間の圏、あるいはスキーム上の有限 étale 被覆の圏と言った自然な幾何学的な例が豊富に存在している。そのため semigalois 圏にも自然な幾何学的な例が存在するだろうと予想していた。本研究では semigalois 圏の自然な幾何学的な例を構成することによって、古典的な Eilenberg 理論の幾何学的・整数論的な応用につなげることを一つの目標とした。またこの研究を副有限モノイドの構造論の研究に還元することも計画していた。

本研究はもともと代数的言語理論という形式言語理論の文脈の研究であったが、Galois 理論との統一によって自然と整数論や代数幾何学への合流が期待された。したがって、本研究で特に代数的言語理論と整数論・代数幾何学の融合研究をすることは自然に思われたため、それも本研究の目標としてあげられた。

3. 研究の方法

幾何学的な例を構成する関連で、Borger と de Smit による2008年および2011年の論文を(東北大学の岩成氏による紹介で)知ることになり、それが semigalois 圏の興味深い例になっていることを見てとった。

しかし Borger と de Smit が構成した semigalois 圏の幾何学的な背景・意味が分かりづかったため、それを見通しよくすることを考え研究した。特にそれ以前から semigalois 圏と Christol の定理が何らかの意味で関連しているのではないかと漠然と予想していたため、Borger と de Smit の研究が Christol の定理と関連づけられるのではないかと始め予想した。その中で Witt vector の簡単な例を計算しているうちに、Christol の定理の類似のような現象が起こることを発見し、一般的に示した。

またこの関連で Bost-Connes 系という C^* 力学系との関連があるらしいことが文献をたどるうちにわかってきたため、Christol の定理と Bost-Connes 系の関連も調べることにした。その関連で C^* 環論の文献を漁った。

4. 研究成果

本研究の成果としては、Christol の定理の数論的類似の証明と、その Bost-Connes 系との関連が挙げられる。

前者は Borger の意味での一般化された Witt vector が整であるための必要十分条件をオートマトンの言葉で特徴づけるものである。これは古典的な有限体上の冪級数に対する Christol の定理の自然な類似である。この結果、Borger と de Smit が構成した semigalois 圏の対象は、整な Witt vector で生成されるような代数であるという見方ができるようになり、元の Christol の定理ではないが、適切な意味で Christol の定理と類似した定理と semigalois 圏を自然に関連づけることに成功した。

また整である Witt vector の代数は、Bost-Connes 系の数論的部分代数に同型であることを観察した。そしてこの関連で、係数が基礎体上の Hilbert class field の整数環である Witt vector の環の構造を表示した。この結果、 j 不変数の特殊値が自然に Witt vector を定めることを観察

している。このことはより一般に成り立つと思われ、modular 関数のある種の変形族の特殊値が Witt vector になること、そして実はすべての Witt vector がそのような形で modular 関数の変形族の特殊値によって実現できるのではないかと思われる。これは谷山・志村予想の類似だろうと認識している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takeo Uramoto	4. 巻 508
2. 論文標題 Semi-galois Categories II: An arithmetic analogue of Christol's theorem	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 339-568
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeo Uramoto	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Semi-galois Categories II: An arithmetic analogue of Christol's theorem	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 浦本武雄	4. 巻 12月号
2. 論文標題 計算階層-代数的言語理論とガロア理論の統一がもたらすもの~	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数学セミナー	6. 最初と最後の頁 48-51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 浦本武雄
2. 発表標題 計算階層の分類と、その圏論的見方
3. 学会等名 知の創出センター-Fusion Research Seminar
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浦本武雄
2. 発表標題 Recent developments in algebraic language theory
3. 学会等名 ERATO MMD-Project Colloquium talk
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浦本武雄
2. 発表標題 Eilenberg理論の公理化について
3. 学会等名 東北大学理学部数学教室談話会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 浦本武雄
2. 発表標題 言語の中に潜むパターンを記述せよ！数理の力とその展望
3. 学会等名 東北大学大学院情報科学研究科シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeo Uramoto
2. 発表標題 Finite automata and non-commutative analogue of lambda rings
3. 学会等名 CALCO Early Ideas 2017 (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 浦本武雄
2. 発表標題 Semi-galois Categories I: The Classical Eilenberg Variety Theory
3. 学会等名 日本ソフトウェア科学大会（招待講演）
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 浦本武雄
2. 発表標題 Semantics of Eilenberg Variety Theory
3. 学会等名 MLG数理論理学研究集会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 浦本武雄
2. 発表標題 代数的言語理論の現状とその展望
3. 学会等名 京大・東大合同セミナー
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----