

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (特設分野研究)

研究期間：2016～2018

課題番号：16KT0127

研究課題名(和文) 確率偏微分方程式を用いた量子乱流の解析

研究課題名(英文) Analysis of quantum turbulence by stochastic PDEs

研究代表者

福泉 麗佳 (Fukuizumi, Reika)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：00374182

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：正の温度を持つグロス・ピタエフスキー方程式，つまり，時空ホワイトノイズと散逸項を伴う非線形シュレディンガー方程式に関して，空間1次元で解の一意的存在，時間無限大での解分布の Gibbs 平衡状態への指数的収束を厳密に証明した．解の大域存在の証明では，推移確率の Strong Feller 性を用いることにより，任意の初期値に対して大域化することに成功した．また，空間2次元の場合についても同様の事実の証明を考え，現在論文執筆中である．

研究成果の学術的意義や社会的意義

ボース統計に従う巨視的な数の粒子が，極低温で最低エネルギー状態に落ち込むことでボース凝縮体が形成される．ミクロのものがマクロに観測できるようになるため，原子の性質が見易くなったり，コントロールできたり物理学においては重要な発見であった．絶対零度(極低温)での凝縮体のモデル方程式であるグロス・ピタエフスキー方程式は，数学でも物理でも多くの研究が存在する．しかし実際は少し温度が上がったとき凝縮体には何が起きているのか，凝縮体と凝縮されずに周辺で運動をしている粒子との相互作用はどのようなものか考慮する必要がある．本研究は，その温度効果を考慮したモデルの解析に数学で貢献している．

研究成果の概要(英文)：We proved in one dimension the existence of unique global solution of Gross-Pitaevskii equation at positive temperature (i.e. nonlinear Schroedinger equation with a dissipation and space-time white noise), and showed that the law of solution converges exponentially to the Gibbs equilibrium as time goes to infinity. In the proof of the globalization of solution, we succeeded to make a globalization for any initial data by the Strong Feller property of transition semigroup. Also, we verified the similar facts in two dimensional case.

研究分野：解析学

キーワード：複素Ginzburg-Landau方程式 ホワイトノイズ Gibbs 熱平衡 ボース・アインシュタイン凝縮 量子渦

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

自然界には(古典)乱流現象が多く見られるが乱流を解析するのは非常に難しく、物理学での難問ともされる。Euler 方程式や Navier-Stokes 方程式に代表される古典的な流体方程式に対する数学解析は数多く存在する。しかしながら、古典流体では、渦の定義が曖昧であり、乱流と渦の間に厳密な関係を与えることは不可能である。一方で、量子流体のモデル方程式である非線形 Schrödinger 方程式では渦を厳密に定義することができ、乱流を渦の視点から理解することができる。したがって、本研究では非線形 Schrödinger 方程式を通して、渦の普遍的な性質を数学により解析し、それをフィードバックする形で、古典乱流中の渦の運動について、理論物理だけでなく実験物理の研究者と連携して解明することを目的とし企画を立ち上げた。例えば、古典乱流を理解する鍵として有名なりチャードソンカスケードの描像があり、乱流の複雑な時間空間構造の背景に渦の階層構造の存在および階層間にまたがる渦のカスケードが示唆されてきた。リチャードソンカスケードの詳細を量子渦の視点から明らかにすることにより、乱流に潜む様々なスケール間の現象を渦運動として理解しようという計画であった。

### 2. 研究の目的

本研究では、熱的ゆらぎが渦に本質的な影響を与える実験結果との比較をするために、非線形 Schrödinger 方程式に熱的效果「散逸項とノイズ」を入れたモデルを考え、以下を研究目的とする。

(1) ボース・アインシュタイン凝縮系の熱平衡状態近傍における相転移(渦生成)を調べることによって、初期宇宙における宇宙ひもの振る舞いを超流動やボース凝縮を用いて理解しようとするアイデアが適当かどうか議論されているが([4])、系の熱平衡状態への時間無限大での収束性は議論されておらず、物理的に重要な問題であるため数学で正当化を行う。

(2) 量子乱流の研究に用いられる非線形 Schrödinger 方程式は、古典乱流のダイナミクスを代表する Navier-Stokes 方程式や Euler 方程式などの流体方程式とどのような類似性・相違性があるのか、熱的效果で渦を発生させて数値実験を行う。

### 3. 研究の方法

(1) モデル方程式の正当化(解の存在)から始め、解の大域化・不変測度の存在と一意性を示し、不変測度が Gibbs 測度であり、解分布は時間が大きくなると指数的に Gibbs 分布に近づく、ということ厳密に示す。

(2) 非線形 Schrödinger 方程式にガリレイ変換を行う。この場合、ノイズがないと仮定すると渦を持たない定常解があると考えられる。その系を大きい速度で一樣並進させ、古典流体モデルに近い状態を考える。渦無し定常解が、微小ノイズが加わった状況で、この流れに対して安定なのか不安定なのか調べ、一樣並進させる速度が大きいときに量子渦が多数生成される乱流状態になるのか。古典乱流の乱流状態と関連があるのかを数値計算する。

### 4. 研究成果

(1) 空間一次元で解の大域存在および Gibbs 平衡状態(Gibbs 測度)の存在と一意性、時間無限大での平衡状態への収束を数学的に証明した。さらに、解の大域存在の証明中では、初期条件に Gibbs 測度に関して確率 1 の集合に属するという条件が必要であるが、推移確率の Strong Feller 性を用いることによって、すべての初期条件に対し大域的であることを証明するのに成功した。また、解分布が Gibbs 分布に時間無限大で指数的に近づくことを Poincaré 不等式を用いて証明した。対象のモデル方程式は複素の係数を持つ方程式であるが、実係数のモデル方程式の場合と同じ Gibbs 不変測度を持つということに気づき、Gibbs 測度の性質を全て実係数のモデルにおいて証明し、複素モデルに最後に適用するという方法を取った。

また、分担者・小林は [4] で数値計算による臨界温度の推測、またその周辺での相転移の性質をユニバーサリティクラスによる分類を用いて考察した。

(2) 非線形 Schrödinger 方程式の系を大きい速度で一樣並進させるとき、量子渦が多数生成される乱流状態になる「乱流転移」が以下の論文の数値計算で初めて成功した。

M. Takahashi, M. Kobayashi, and K. A. Takeuchi, "Universal critical behavior at a phase transition to quantum turbulence," arXiv: 1609.01561

生成した量子乱流と古典乱流との比較は現在継続して行っている。

### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 5 件)

[1] Anne de Bouard, Arnaud Debussche, [Reika Fukuizumi](#), Romain Poncet, "Fluctuations and temperature effects in Bose-Einstein condensation," ESAIM: proceedings and surveys, 61(2018) 55-67 査読有

[2] Anne de Bouard, Arnaud Debussche, [Reika Fukuizumi](#), "Long time behavior of Gross-Pitaevskii equation at positive temperature," SIAM. J. Math. Anal. 50(2018) 5887-5920 査読有

[3] Hiromitsu Takeuchi, [Michikazu Kobayashi](#) and Kenichi Kasamatsu, "Is a double

quantized vortex dynamically unstable in uniform superfluids?" J. Phys. Soc. Japan 87 (2017) 023601-1-5 査読有

[4] Michikazu Kobayashi and Leticia F. Cugliandolo, "Quench dynamics of the three-dimensional U(1) complex field theory: geometric and scaling characterisation of the vortex tangle," Phys. Rev. E. 94 (2016) 062146-1-41 査読有

[5] Michikazu Kobayashi and Leticia F. Cugliandolo, "Thermal quenches in the stochastic Gross-Pitaevskii equation: Morphology of the vortex network," Europhysics Letters. 115 (2016) 20007-1-6 査読有

〔学会発表〕(計 28 件)

[1] 福泉麗佳 "BEC model with a trapping potential varying randomly in time- a review," Scientific Computing Across Scales: Quantum Systems in Cold-matter Physics and Chemistry, Fields Institute, Toronto, Canada, 2019/4

[2] 福泉麗佳 "Bose-Einstein 凝縮モデルにおける温度効果," 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会特別講演, 岡山大学, 2018/9

[3] 福泉麗佳 "On the stochastic Gross-Pitaevskii equation, Conference of Mathematics on Wave Phenomena," KIT, Germany 2018/7

[4] 福泉麗佳 "Some theoretical studies on the stochastic Gross-Pitaevskii equation," The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Taipei, Taiwan 2018/7

[5] 福泉麗佳 "Recent progress of theoretical and numerical research for BEC models," 研究会「第4回量子渦と非線形波動」東京理科大学 2018/1/19

[6] 福泉麗佳 "On the Gibbs equilibrium in stochastic complex Ginzburg-Landau Equations" 東北大学片平キャンパスさくらホール「2017年確率論シンポジウム」 2017/12/13

[7] 福泉麗佳 "量子流体の数値モデル" 東北大学情報科学研究科棟 談話会「第72回情報科学談話会」 2017/11/14

[8] 福泉麗佳 "Gross-Pitaevskii equation at positive temperature" Rouen 大学(フランス) 「LMRS Colloquium」 2017/10/12

[9] 福泉麗佳 "Long time behaviour of Gross-Pitaevskii equation at positive temperature," 「第18回北東数学研究集会」東北大学 2017/2/20

[10] 福泉麗佳 "Exponential convergence to the equilibrium for the stochastic Ginzburg-Landau equation," 研究会「第3回量子渦と非線形波動」東京理科大学 2016/11/10

[11] 福泉麗佳 "Exponential convergence to the equilibrium for the stochastic Gross-Pitaevskii equation," IMA 研究集会「Mathematical and Physical Models of Nonlinear Optics」ミネソタ大学, アメリカ合衆国 2016/10/31

[12] 福泉麗佳 "Gibbs measure for the Gross-Pitaevskii equation driven by a space-time white noise," 研究会「量子渦と非線形波動」東京理科大学 2016/01/20

[13] 小林未知数 "Topologically protected linking number cascade in non-Abelian quantum turbulence," Topological Science Workshop 2017 慶応義塾大学 2017/02/24

[14] 小林未知数 "Turbulence in quantum hydrodynamics," RIMS workshop on "Mathematical Analysis of Viscous Incompressible Fluid" 京都大学数理解析研究所 2016/11/14

[15] 小林未知数 "非可換量子乱流で実現する新しい乱流のユニバーサリティクラス," 新学術領域「ゆらぎと構造」第2回冷却原子研究会 大阪市立大学 2017/03/16

[16] 小林未知数 "非線形シュレディンガー方程式で記述される量子流体力学および乱流," 北陸応用数理研究会 2017 しいのき迎賓館, 金沢市 2017/02/17

[17] 小林未知数 "量子乱流におけるヘリシティ," 研究会「第3回 量子渦と非線形波動」東京理科大学 2016/11/09

[18] 小林未知数 "対称性の破れに基づく結晶の有効理論の構築およびトポロジカル欠陥の動力学," IMI 研究集会「結晶のらせん転移の数値」九州大学 2016/09/02

[19] 小林未知数 "発達量子乱流におけるケルビン波カスケード," 日本物理学会 2016 年秋季大会 金沢大学 2016/09/16

[20] 小林未知数 "Energy and helicity cascade in non-Abelian quantum turbulence," Advances in Mathematical Modelling and Numerical Simulation of Super fluids, Université de Rouen, France 2017

[21] 小林未知数, 衛藤稔, 新田宗土 "2成分ボース系における量子渦のトポロジーおよびBKT転移," 日本物理学会 2017 年秋季大会, 岩手大学 2017

[22] 小林未知数 "Energy-helicity dual cascades in non-Abelian quantum turbulence Topological Science Symposium 2017," 慶応大学 2017

[23] 小林未知数 "3次元量子乱流におけるエネルギー・ヘリシティ2重カスケード," 「第4回 量子渦と非線形波動」東京理科大学 2018

- [24] 小林未知数, 上田正仁 “非可換量子乱流におけるエネルギーおよびヘリシティースケール,” 日本物理学会第73回年次大会, 東京理科大学 2018
- [25] 小林未知数 “Modelling nonlinear Schrödinger superfluid turbulence The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems,” Differential Equations and Applications, Taipei, Taiwan 2018
- [26] 小林未知数 “Quantum turbulent transition in a uniform velocity field,” 「第5回 量子渦と非線形波動」 東京理科大学 2019
- [27] 小林未知数 “1次相転移界面を含む熱伝導状態の構造: ハミルトン・ポッツ模型を用いた数値解析,” 日本物理学会第74回年次大会, 九州大学 2019
- [28] 小林未知数 “Directed percolation universality class in transition of quantum turbulence,” Scientific Computing Across Scales: Quantum Systems in Cold-matter Physics and Chemistry, Fields Institute, Toronto, Canada 2019

〔図書〕(計 1 件)

- [1] 坪田誠、笠松健一、小林未知数、竹内宏光 「量子流体力学」丸善出版 (2018) 360 ページ

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~fukuizumi/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名: 小林 未知数

ローマ字氏名: Michikazu Kobayashi

所属研究機関名: 京都大学

部局名: 理学研究科

職名: 助教

研究者番号 (8 桁): 50433313

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名: Anne de Bouard

ローマ字氏名: Anne de Bouard

研究協力者氏名: Romain Poncet

ローマ字氏名: Romain Poncet

研究協力者氏名: Arnaud Debussche

ローマ字氏名: Arnaud Debussche

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。