

令和元年6月6日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C)（特設分野研究）

研究期間：2016～2018

課題番号：16KT0136

研究課題名（和文）楽曲と歌詞の離散構造

研究課題名（英文）Discrete Structure of Music and Lyrics

研究代表者

齋藤 明 (SAITO, Akira)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：90186924

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：音楽の数学的性質を離散数学の立場から調べた。和音が表す音の組み合わせは辺着色されたグラフとして表される。また楽曲の進行もグラフで表現できるが、歌詞を音の遷移を表す辺につけられた色と解釈することで、やはり辺着色されたグラフにモデル化される。本研究はこうした辺着色されたグラフの禁止部分グラフの極大元を特定する手法を確立した。また、楽曲におけるショートカットはサイクルの弦と考えられる。そこでサイクルの中の弦の分布を調べ、辺密度が十分大きいグラフに指定された長さのサイクルがあれば、弦を含む同じ長さのサイクルが存在することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来の数学による音楽研究は、音を空気の振動と捉えた物理量の研究、あるいは音のパターンに潜む物理量の規則的变化を数列と捉えた初等整数論に基づくものが主流であった。本研究はそうしたアプローチとは別の視点から音楽を捉えた。すなわち、和音の組み合わせや歌詞の乗った楽曲を辺に色がつけられたグラフと解釈し、グラフ理論の立場から音楽研究を行った。この研究は音楽研究に新たな視点を与える。またこのようなアプローチにより、楽曲を音の組み合わせというミクロの視点ではなく、楽曲全体の進行を見渡すマクロな視点を与えられた。

研究成果の概要（英文）：We studied properties of music and lyrics from a viewpoint of discrete mathematics. Observing that accord of the music and the progression of a song can both be represented as an edge-colored graph, we first studied forbidden subgraphs of edge-colored graphs. The properties associated with forbidden subgraphs are often determined by the maximal ones. In order to facilitate the study of these properties, we established a method to identify the maximal forbidden subgraphs in edge-colored graphs.

We also studied chords in graphs. When we interpret a song as a cycle in a graph representing the possible progression of music, a shortcut of a song corresponds to a chord. Hence, we investigated the distribution of the chords. We discovered that if a graph contains sufficiently many edges relative to its order and it contains a cycle of length  $k$ , then it contains a chorded cycle of the same length  $k$ .

研究分野：グラフ理論

キーワード：音楽 グラフ 辺着色 サイクル 弦

## 1. 研究開始当初の背景

音楽と数学の類似性については、古来多くの人々が指摘している。また音楽の中に潜む数学的な性質を明らかにする研究も数多く存在する。しかしこれまでの研究は音楽を音、すなわち空気の振動と捉え、その周期や振幅を議論するか、あるいは音のパターンに潜む物理量の変化を数列を考えて、その規則性を初等整数論の枠組みで探ることに焦点を当ててきた。最近はより高度な数学を用いた音楽研究も表れつつあるが、それらは単音間の関係に留まっており、1つの楽曲全体という複雑なシステムを扱うレベルには達していない。一方音楽は情報科学からも研究が進められている。しかし、情報科学における音楽研究は、音の認識や楽器の同定という特定の目的を持つため、ある程度の基礎を明らかにした後は、システムの構築や実装に向かってしまう。情報科学からの音楽研究は、楽曲を数理的に解明しようとする動機に乏しかった。

本研究代表者は、本課題研究を実施する前に北原鉄朗分担者と情報科学における音楽研究の現状を聴く機会を持った。その結果音楽は、局所的、大域的に多くの組合せ論的な構造を内包していることを知った。また、楽曲とその上で歌われる歌詞の関係は、数学、情報科学いずれにおいても、これまで研究されていないことを知った。

## 2. 研究の目的

前項で述べた背景の下、本研究は楽曲進行をグラフ理論の立場から研究することを目的とした。具体的には以下の3点に焦点を当てた。

- (1) 和音の離散モデル化
- (2) 可能なメロディ進行が作り出すグラフの性質の解明
- (3) 楽曲と歌詞の離散数学的關係

## 3. 研究の方法

まず研究目的「(1) 和音の離散モデル化」では、和音を適切に表現するグラフのモデルの構築を目指した。そのために、音階の組み合わせを、音階を頂点とする完全グラフの辺着色として表現した。その上で和音として成立する辺の着色は、rainbow と呼ばれる着色について特定の部分グラフを含まないと仮定した。このような仮定の下で禁止部分グラフを論じた場合、あるグラフ  $H$  とその部分グラフ  $K$  について、十分色数の多い rainbow  $H$ -フリーな完全グラフの辺着色が常に rainbow  $K$ -フリーとなることがある。辺着色されていない一般のグラフでは、任意の  $H$ -フリーグラフが  $K$ -フリーになるという現象は観察され得ない。すなわちこれは辺着色されたグラフに特有の現象である。そこでこの現象の解明を進めた。

研究目的「(2) 可能なメロディ進行が作り出すグラフの性質の解明」では、楽曲が作るグラフのサイクルを調べた。歌詞が乗る多くの楽曲では、同じメロディ進行に異なる歌詞が現れる。これを可能とするため、楽曲が作るグラフの多くはハミルトンサイクルを持つ。また多くの歌は、歌の一部を省略するショートカットを持つ。このショートカットはサイクルの弦に対応する。そこでサイクルの弦の分布を調べた。

研究目的「(3) 楽曲と歌詞の離散数学的關係」においても、楽曲をグラフの辺着色と捉えた。歌詞の持つ意味表現をメロディ進行のなす辺に塗られた色と考え、このモデルの下でサイクルの分布を考えた。

## 4. 研究成果

### (1) 和音の離散モデル化

位数  $n$  のグラフ  $G$  の辺を 0、その補グラフの辺を 1 で着色すれば、 $(G, \bar{G})$  は完全グラフ  $K_n$  の 2 色での辺着色に他ならない。そこで本研究では辺着色された完全グラフを考えた。

位数  $n$  の完全グラフ  $K_n$  とその辺着色  $C: E(K_n) \rightarrow \mathbb{Z}^+$  の組を  $(K_n, c)$  と表す。 $K_n$  の部分グラフ  $H$  について、 $E(H)$  の各辺に割り当てられた色が全て異なるとき、 $H$  は rainbow であると呼ばれる。また  $(K_n, c)$  に  $H$  と同形な rainbow 部分グラフが存在しないとき、 $(K_n, c)$  は rainbow  $H$ -フリーであると呼ばれる。和音は異なる音階の集合なので、音階ごとに辺着色すれば、辺着色された完全グラフの rainbow 部分グラフとなり、和音として許されない音の

組み合わせは、ある連結グラフ  $H$  について rainbow  $H$ -フリーグラフとなる。和音の対象となり得る部分グラフ  $H$  は数多いので、包含関係に関して極大なものだけを扱いたい。しかしここで1つの問題が生じる。連結グラフ  $H$  とその連結部分グラフ  $H'$  について、rainbow な  $H'$  は rainbow な  $H$  を部分グラフに含む。従って rainbow  $H$ -フリーグラフは自明に rainbow  $H'$ -フリーである。しかし十分多い色数で着色された任意の rainbow  $H'$ -フリーグラフが rainbow  $H$ -フリーになることがある。このため、rainbow  $H$ -フリーグラフの包含関係を、単純に部分グラフの問題に置き換えることができない。そこで本研究代表者はこのような現象がどのようなときに生じるかを調べ、以下の結果を得た。 $K_{1,k}$  を部集合の位数が1と  $k$  である完全2部グラフ(スターとよばれる)、 $K_{1,k}^+$  を  $K_{1,k}$  の1つの辺を単純細分して得られるグラフとする。

**定理 1.** 任意の3以上の整数  $k$  に対して、有る正整数  $l_0$  が存在して、 $l_0$  以上の色数で辺着色された rainbow  $K_{1,k}^+$ -フリーグラフは rainbow  $K_{1,k}$ -フリーである。

**定理 2.**  $H$  を位数4以上の連結グラフ、 $H'$  を  $H$  を部分グラフに含む連結グラフとする。もし  $H, H'$  に依存する十分大きい整数  $l_0 = l_0(H, H')$  が存在して、 $l_0$  以上の色数で辺着色された任意の rainbow  $H'$ -フリーグラフが rainbow  $H$ -フリーとなるならば、ある定数  $k$  について  $(H, H') = (K_{1,k}, K_{1,k}^+)$  である。

この結果は、極大禁止グラフの抽出を部分グラフの半順序に基づく抽出に置き替えても、大きな問題が生じないことを示しており、今後の研究に強い指針を与える。

## (2) 可能なメロディ進行が作り出すグラフの性質の解明

メロディ進行として遷移可能な和音間を辺で結ぶことにより、楽曲として存在し得る全ての表現を表すグラフを考えることができる。これを楽曲グラフと呼ぶ。楽曲に歌詞がつき、さらにその歌詞に2番以降がある場合、楽曲は同じメロディを繰り返す。こうした楽曲は楽曲グラフの中のサイクルとして表現される。さらに多くの楽曲には短縮バージョンが存在する。短縮バージョンは楽曲を成すサイクルの離れた2頂点へ遷移する。これはサイクルの弦に相当する。本研究代表者は、サイズが大きいグラフにおけるサイクルの弦の分布を調べる方法を開発した。正整数  $k$  に対して位数  $k$  のサイクルを  $k$ -サイクルと呼ぶ。また弦を持つサイクルを弦付きサイクルと呼ぶ。研究の結果、以下を示した。

**定理 3.**  $G$  を位数  $n$  のグラフ、 $k$  を5以上の整数とする。もし  $G$  が  $k$ -サイクルを持ち、かつ  $|E(G)| \geq \frac{1}{4}n^2$  であれば、 $G$  は弦付き  $k$ -サイクルを持つ。

上記の定理は最良ではなく、特定の  $k$  の値については、仮定にある  $|E(G)|$  の下界を下げることに成功した。

一方北原分担者は、楽曲の旋律上に木構造を構築した。この木構造は個々の音の情報をもたないため、音楽の知識に乏しいユーザが木構造を変形することで新たな旋律を生成することを可能にする。実際にこの木構造を操作するシステムを構築することで、旋律を生成するシステムを試作し、評価実験を行った。その結果、音楽の知識を持たないユーザもシステムを用いて旋律を生成し、作曲の楽しみを得ることが分かった。

## (3) 楽曲と歌詞の離散数学的関係

楽曲に歌詞がある場合、その歌詞は遷移を表す辺に割り当てられる色と捉えられる。この解釈により、楽曲は辺着色されたグラフと解釈され、歌詞がついた楽曲グラフの問題は、研究目的(1)に現れた問題とほぼ等価になる。一方歌詞が載った楽曲は、通常の楽曲に比べサイクル構造を成す確率が高くなる。そこでサイクル構造に関してさらに詳しく調べた。与えられたグラフの2-正則な全域部分グラフを  $G$  の2-因子とよぶ。言い換えれば、2-因子とは各成分がサイクルとなる全域部分グラフである。本研究代表者は、特定のグラフを禁止することにより2-因子の存在が導かれるような禁止部分グラフの特定を試みた。その結果、3個以下のグラフを禁止することにより、最小次数2以上、最大次数3以上の連結グラフに2-因子の存在が保証される場合を決定した。

韓分担者は、自然言語の立場から歌詞の構造を調べた。歌詞と日常文の差異を調べるために、日常言語を深層学習するシステムをロボットに組み込み、それに歌詞を入力して、日常文と同様な学習効果が得られるかを実験した。その結果、日常文を学習するロボットは歌詞を効

果的に学習しないことを見出した。これは日本文と歌詞の間には、言語としての差異があることを表している。また韓分担者は歌のタイトルと歌詞の関係を調べた。単語の分散表現を利用して、多くの歌詞付き楽曲における歌詞の類似度とタイトルの類似度を計算し、それを印象評価実験の結果と比較した。その結果歌詞内に歌のタイトルが離散的に含まれていると、歌詞の意味はむしろ伝わりづらくなるという結果を得た。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 13 件)

- (1) Y. Lao, R. Kasai, T.Wu and D. Han, Corpus-generation support system based on news websites with URL extraction and news selection techniques, International Journal on Digital Content Technology and Its Applications, 査読有, **13** (2019) 144–153, <http://www.globalcis.org/jdcta/home/index.html>
- (2) S. Ichinose, S. Mizuno, S. Shiramatsu and T. Kitahara, Two approaches to supporting improvisational ensemble for music beginners based on body motion tracking, International Journal of Smart Computing and Artificial Intelligence 査読有, **3** (2019) <http://www.iaiai.org/journals/index.php/IJSCAI/index>
- (3) G. Chen, R. Gould, X. Gu and A. Saito, Cycles with a chord in dense graphs, Discrete Mathematics, 査読有, **341** (2018) 2131–2141, DOI:10.1016/j.disc.2018.04.016
- (4) T. Kitahara, G. Sergio and R. Rafael, Jamsketch : Improvisation support system with GA-based melody creation from user’s drawing, Music Technology with Swing, 査読有, (2018) 509–521, [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-01692-0\\_34](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-01692-0_34)
- (5) T. Yamada, T. Kitahara, H. Arie and T. Ogata, Four-part harmonization : comparison of a Bayesian newtork and a recurrent neural network, Music Technology and Swing, 査読有, (2018) 213–225, [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-01692-0\\_15](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-01692-0_15)
- (6) M.D. Plummer and A. Saito, Toughness, binding number and restricted matching extension in a graph, Discrete Mathematics, 査読有, **340** (2017) 2665–2672, DOI:10.1016/j.disc.2016.10.003
- (7) R.E.L. Aldred, J. Fujisawa and A. Saito, Edge proximity and matching extension in punctured planar triangulations, Discrete Mathematics, 査読有, **340** (2017) 2978–2985, DOI:10.1016/j.disc.2017.07.2017
- (8) G. Chen, M.N. Ellingham, A. Saito and S. Shan, Spanning trails with maximum degree at most 4 in  $2K_2$ -free graphs, Graphs and combinatoric, 査読有, **33** (2017) 1095–1101, DOI:10.1007/s00373-017-1823-2
- (9) T. Kitahara, Music generation using Bayesian networks, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 査読有, vol. 10536 (2017) 368–372, DOI:10.1007/978-3-319-71273-4\_33
- (10) A. Saito and K.Sano, Spanning trees homeomorphic to a small tree, Discrete Mathematics, 査読有, **338** (2016) 2260–2274, DOI:10.1016/j.disc.2015.10.004
- (11) A. Saito and L. Xiong, The Ryjáček closure and a forbidden subgraph, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 査読有, **36** (2016) 621–628, DOI:10.7151/dmgt.1876
- (12) N. Ananchuen, W. Ananchuen and A. Saito, Extendability of the complementary prism of bipartite graphs, Australasian Journal of Combinatorics, 査読有, **66** (2016) 436–448, <https://ajc.maths.uq.edu.au>
- (13) 鈴木潤一,北原鉄朗, 複数人が同一空間で音楽を聴くための選曲・再生システム, 情報処理学会論文誌 (テクニカルノート), 査読有 **57** (2016) 2526–2530, <https://www.ipsj.or.jp/journal/index.html>

[学会発表] (計 12 件)

- (1) A. Saito, Hamiltonian bipartite graphs in dense graphs (招待講演), International Conference on Graphs, Artificial Intelligence and Complex Networks, 2018 年
- (2) A. Saito, Hamiltonian bipartite graphs in dense graphs (招待講演), 8th Cracow Conference on Graph Theory, 2018 年
- (3) A. Saito, Spanning bipartite graphs with high degree sum in Graphs (招待講演), 6th Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2018 年
- (4) S. Misuno, T. Kitahara, S. Shiramatsu and S. Ichinose, Jamgesture : An improvisation support system based on physical gesture observed with smartphone, 24th ACM Symposium on Virtual Reality Software and Technology, 2018 年
- (5) T. Kitahara, Y. Sato, S. Giraldo and R. Ramirez, An improvisation system for disabilities based on melody creation with gaze control, 3rd Conference on Computer Simulation of Music Creativity, 2018 年
- (6) A. Uemura and T. Kitahara, Preliminary study on morphing of chord progression, 3rd Conference on Computer Simulation of Music Creativity, 2018 年
- (7) A. Saito, Cycles with a chord in graphs, 31st Midwest Conference on Combinatorics and Combinatorial Computing, 2017 年
- (8) A. Saito, Forbidden subgraph in edge-colored graphs (招待講演), 2017 Joint Mathematics Meetings, 2017 年
- (9) D. Han, and A. Inoue, Efficiency improvement of literature survey on citation-reason visualization, 2017 International Conference on Knowledge Engineering and Applications, 2017 年
- (10) D. Han, T. Ishibashi, T. Takanami and R. Shinozaki, A method to extract size-feelings from customer-reviews, 8th International Conference on Information, 2017 年
- (11) Y. Matsuura, T. Tanahashi and T. Kitahara, A pattern recognition approach to analyze temporal evolution of a bassist's musical styles, 2nd Conference on Computer Simulation of Musical Creativity, 2017 年
- (12) T. Kitahara, Smart loop sequencer : An auto-based approach for ease of music creation (招待講演), 6th Joint Meeting of the Acoustical Society of America, 2016 年

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名 : 韓 東力

ローマ字氏名 : (HAN, dongli)

所属研究機関名 : 日本大学

部局名 : 文理学部

職名 : 教授

研究者番号 (8 桁) : 10365033

研究分担者氏名 : 北原 鉄朗

ローマ字氏名 : (KITAHARA, tetsuro)

所属研究機関名 : 日本大学

部局名 : 文理学部

職名 : 准教授

研究者番号 (8 桁) : 00454710