

平成22年6月12日現在

研究種目：基盤研究（A）
研究期間：2005～2008
課題番号：17204001
研究課題名（和文） 高次元代数多様体の標準因子の研究
研究課題名（英文） Research on canonical divisors of higher dimensional algebraic variety
研究代表者 川又 雄二郎（KAWAMATA YUJIRO）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：90126037

研究成果の概要：極小モデル理論において残された予想（フリップの終結予想とアバダンス予想）の研究を行い、因子の空間の有理多面体への分割構造を中心として結果を得た。とくに、双有理同値な極小モデルはフロップの列で結べることを証明した。また、極小モデル理論における基本的操作と導来圏の半直交分解との対応に注目し、商特異点や単純特異点のみをもつような代数多様体に対して良い導来圏の定義を見出し、極小モデル理論との関係を証明した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	10,000	3,000	13,000
2006年度	9,400	2,820	12,220
2007年度	9,400	2,820	12,220
2008年度	9,400	2,820	12,220
年度			
総計	38,200	11,460	49,660

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数多様体、代数的ファイバー空間、極小モデル、標準因子、連接層、導来圏、半直交分解、フリップ

1. 研究開始当初の背景

高次元代数多様体の構造を標準因子の様子を使って調べることが、研究代表者が長年取り組んできた基本的研究テーマである。とくに極小モデル関係の研究を多くおこなってきたが、近年に至って極小モデル理論の完成が近いと思われる状況になった。そ

こで、残されたフリップの終結予想やアバダンス予想に取り組んだ。一方、代数多様体上の連接層の圏やその導来圏は以前から基本的な研究対象であったが、同型ではない代数多様体が同値な導来圏を持つ場合があるという現象が観察せられ、研究代表者はこの現象の背後に標準因子がセール関手という形

態を通して関与していることを証明した。そこで、標準因子の変化を追う極小モデルプログラムと導来圏の変化の様子の対応が研究対象となった。

2. 研究の目的

極小モデル理論関係では、フリップの終結予想とアバダンス予想に取り組み、その背後にある因子の空間の構造を研究した。また、標準因子の変化を追う極小モデルプログラムと、導来圏の変化の様子の対応を研究対象とし、うまく定義された導来圏に対してはその半直交分解が極小モデル理論における収縮写像に対応することを予想し、また、特異点をもった多様体や多様体対に対してよい導来圏を定義することを目標とした。

3. 研究の方法

シアトルで開かれたアメリカ数学会夏季研究所やドイツのオーバーヴォルフアッハ研究所などでの代数幾何学研究集会や、ジョンズホプキンス大学にある日米数学研究所やカリフォルニア大学バークレー校にある数理科学研究所などで開催された代数幾何学のスペシャルイヤーをはじめとする多くの研究集会に出席して研究連絡を行うとともに、東京などでの国際研究集会やその準備としての玉原国際セミナーハウスでの勉強会などを多数開催し、Hacon 氏や McKernan 氏をはじめとする極小モデル理論の代表的研究者や、Bondal 氏や Orlov 氏をはじめとする導来圏理論の代表的研究者などを多数招聘した。

4. 研究成果

極小モデル予想関係では以下の結果を得た。フリップの終結予想を4次元の場合に考察し重要な場合にこれを証明した

(Alexeev-Hacon との共著論文④)。これは Birkar-Cascini-Hacon-McKernan による帰納的な証明とは異なり、ディフィカルティーの概念を高次元に拡張する方法によるものであり、境界が巨大ではない場合には重要になる可能性がある。

Birkar-Cascini-Hacon-McKernan は境界が巨大である場合にフリップの終結予想を証明し、その応用として境界が巨大であるような場合には、複数の双有理同値な極小モデルは互いにフロップの列で結べることを証明した。一般的に言って、極小モデル理論の今後の課題は境界の条件を取り除くことであるので、論文⑦では境界の条件を取り除いて、任意の複数の双有理同値な極小モデルは互いにフロップの列で結べることを証明した。証明では以前に証明した端射線の長さを抑える定理が有効に用いられた。

因子の空間の重要性がわかってきたので、因子の空間の有理多面体への分割の様子を研究し、その有限性と極小モデルの存在との関連を明らかにした (論文⑩)。

導来圏関係では以下の結果を得た。商特異点をもつような多様体に対して良い導来圏を定義し、極小モデル・プログラムの各操作 (因子収縮写像、フリップ、森ファイバー空間) がこのように定義した導来圏の半直交分解と対応することを証明した (①)。

応用として、トーリック多様体に対してこのように定義した導来圏は接続層からなる例外対象列で生成されることを証明した (論文③)。

また、フロップによる導来圏の不変予想を低次元のグラスマン多様体から得られる向井フロップの場合に証明した (論文②)。

商特異点よりも複雑な特異点をもつような代数多様体に対するよい導来圏の定義を研究し、単純特異点 (ディンキン図形に対応

した特異点)のみを持つような場合に良い導来圏の定義を見出した。これは、特異点の圏論的なクレパント解消を行ったことに相当する。たとえば、特異点を持った n 次元カラビヤウ多様体上の特異点のなかに、2次元や3次元といった低次元に住む対象が隠れているという新しい現象を発見した。

代数多様体間の連結な全射を代数的ファイバー空間と呼ぶ。以前証明した半正值性定理は、標準束の順像が退化ファイバーのところも含めて底空間の方向に沿って半正值に曲がっていることを主張している。この事実は、ファイバーとしてあらわれる代数多様体たちのモジュライ空間およびそのコンパクト化の存在とも関係し基本的である。この定理はさらに高次元代数多様体研究のさまざまな場面で応用され重要である。一方、必ずしも既約ではないような代数多様体の研究も大切である。そこで、全空間が必ずしも既約ではないような代数的ファイバー空間の半正值性定理を証明した。証明では混合ホッジ構造の重さフィルトレーションをうまく定義することが重要になるが、対応する層の台の余次元を使って重さを定義することにより組み合わせ的に自然な式を導出し、留数をとるという写像との両立を図った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- ① Yujiro Kawamata Remarks on the cone of divisors. To appear in Classification of Algebraic Varieties, Sciermonnikoog. 査読あり。
- ② Yujiro Kawamata Finite generation of a canonical ring. Current Development in Mathematics 2007, International Press, 2009, 43-76. 査読あり。

- ③ Yujiro Kawamata Derived categories and birational geometry. Algebraic Geometry Seattle 2005, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 80.2(2009), American Mathematical Society, 655-665. 査読あり。
- ④ Yujiro Kawamata Flops connect minimal models. Publ. RIMS, Kyoto Univ. (2008), 419-423. 査読あり。
- ⑤ Yujiro Kawamata A product formula for volumes of varieties. An appendix to a paper by De-Qi Zhang. Math. Ann. 339(2007), No. 4, 972-974. 査読あり。
- ⑥ Valery Alexeev, Christopher Hacon, Yujiro Kawamata. Termination of (many) 4-dimensional log flips. Invent. Math. 168(2007), 433-448. 査読あり。
- ⑦ 川又雄二郎 代数幾何学と導来圏. 数学 58(2006), 64-85. 査読あり。
- ⑧ Yujiro Kawamata Derived categories of toric varieties. Michigan Math. J. 54 (2006), 517-535. 査読あり。
- ⑨ Yujiro Kawamata Derived equivalence for stratified Mukai flop on $G(2, 4)$. In Mirror Symmetry V, Noriko Yui and James D. Lewis, eds. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 38(2006), 285-294. 査読あり。
- ⑩ Yujiro Kawamata Log Crepant Birational Maps and Derived Categories. J. Math. Sci. Univ. Tokyo 12 (2005) 211-231. 査読あり。

[学会発表] (計10件)

- ① Yujiro Kawamata Minimal models and derived categories. Noncommutative Algebraic Geometry and Related Topics, Kyoto Univ. August 24-28, 2009.

- ② Yujiro Kawamata Categorical crepant resolutions of simple singularities. Plenary Lecture, 1st PRIMA Congress, Univ. New South Wales, Australia, July 6-10, 2009.
- ③ Yujiro Kawamata 曲線の錐体と因子の錐体、談話会、東京大学 2008 年 11 月 28 日。
- ④ Yujiro Kawamata Minimal models and derived categories. 60 Miles, UCL and London Mathematical Society, July 16-18, 2008.
- ⑤ Yujiro Kawamata 標準環有限生成定理、総合講演、日本数学会年会、近畿大学 2008 年 3 月 23 日-26 日。
- ⑥ Yujiro Kawamata Recent progress on the minimal model program. Current Developments in Mathematics 2007, Harvard Univ., November 16-17, 2007.
- ⑦ Yujiro Kawamata Flops connect minimal models. Beauville 60 Conference, Institut Henri Poincare, June 11-15, 2007.
- ⑧ Yujiro Kawamata Recent advances in the minimal model program. Global KMS Day, Korean Mathematical Society, Seoul National University, Korea, October 2006.
- ⑨ Yujiro Kawamata Recent advances in the minimal model program. Felix-Klein-Lectures, University of Bonn, Germany, May to July 2006.
- ⑩ Yujiro Kawamata Derived categories and birational geometry. AMS Summer Institute, University of Washington, Seattle, USA, August 2005.

[その他]
ホームページ等

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawamata_lab/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川又 雄二郎 (KAWAMATA YUJIRO)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：90126037

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

桂 利行 (KATSURA TOSHIYUKI)
法政大学・理工学部・教授
研究者番号：40108444
宮岡 洋一 (MIYAOKA YOICHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：50101077
織田 孝幸 (ODA TAKAYUKI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：10109415
斎藤 秀司 (SAITO SHUJI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：50153804
斎藤 毅 (SAITO TAKESHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：70201506
寺杣 友秀 (TERASOMA TOMOHIDE)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：50192654
高木 寛通 (TAKAGI HIROMICHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：30322150