

平成21年 5月19日現在

研究種目：基盤研究（B）
 研究期間：2005～2008
 課題番号：17340006
 研究課題名（和文） ファノ多様体とモジュライ空間－フェアリンデ公式とヒルベルト第14問題を中心にして
 研究課題名（英文） Fano varieties and moduli spaces with emphasis on the Verlinde Formula and the 14th problem of Hilbert
 研究代表者
 向井 茂（MUKAI SHIGERU）
 京都大学・数理解析研究所・教授
 研究者番号：80115641

研究成果の概要：代数多様体の中には、曲線、K3曲面とファノ多様体という3つの良い族がある。これらは単独でも興味深い、互いにモジュライという関係で繋がっていることを観察することによって、より深い理解に到達できると思う。今回の研究課題では、フェアリンデ型公式との関係や不変式環への応用から研究を始めて、エンリケス曲面の位数2のある種の自己同型や偏極K3曲面のモジュライの単有理問題への応用を研究した。また、Mumfordのpathologyとして有名な現象をよく理解するために、3次元多様体内の曲線の変形に対する障害類が消えないための充分条件についても研究した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	2,800,000	0	2,800,000
2006年度	1,900,000	0	1,900,000
2007年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
年度			
総計	7,700,000	900,000	8,600,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何学、ヒルベルトの第14問題、quiver、フェアリンデ公式、ヒルベルト概型、エンリケス曲面、ファノ多様体、モジュライ

1. 研究開始当初の背景

(1) 永田型の不変式環の研究が進み、そこで得られた結果をそれ以外の不変式環に拡張できるかもしれないという雰囲気があった。特に、代表者向井は「2次元加法群の線形表現の不変式環がいつも有限生成ではないか」という問題を提出していた。また、いくつか

のファノ多様体に対してフェアリンデ公式とよく似た公式の成立することも向井は観察していた。

(2) 研究協力者 那須は、ヒルベルト概型に対するMumfordの反例を詳しく解析し、3次元射影空間内の曲線の1位無限小変形に対

して、その障害類が消えないためのある充分条件を見つけていた。

(3) 代表者向井は直積型クンマー曲面と Barth-Peters 曲面の間の同種を発見し、コホモロジーに自明に作用するエンリケス曲面の自己同型の分類への応用を考え始めていた。

(4) 高種数の偏極 $K3$ 曲面のモジュライが一般型であることが証明されつつあって、小さい種数での単有理性問題が以前よりも興味をもたれ始めていた。

2. 研究の目的

(1) ベクトル束などのモジュライ空間として興味深いファノ多様体の系列が沢山得られるが、このようなファノ多様体ではフェアリンデ公式のような綺麗な次元公式が成立したり、コホモロジー環が具体的に書き下せたりと一般論では説明できない面白い性質が観察される。このような諸性質をもつ他のファノ多様体を広く探す。

(2) 代数群が多項式環に作用するときの不変式環の有限生成性、すなわち、修正されたヒルベルトの第 14 問題の肯定的な結果を探す。代数群が非簡約で有限生成性が示されている場合がいくつかあるが、それらの場合には不変式環がある(弱)ファノ多様体の全座標環と同型になっている。その代数多様体がファノ多様体であったりモジュライ空間であったりするおかげで有限生成性が証明できる。いくつかの系列では同時にフェアリンデ型の公式が成立しているので、このことと有限生成性の関連を探りたい。

(3) 曲線から 3 次元多様体への射の変形の障害類の非消滅のための条件を探す。

(4) 3 次元ファノ多様体や高次元射影空間の曲線による爆発で得られるファノ多様体に対して、それらのヒルベルト級数や全座標環を計算し、フェアリンデ型公式との類似を探る。

(5) モジュライ空間の手法を用いることによって、数値的に自明な自己同型をもつエンリケス曲面の分類を完成させる。さらに、その技術を発展させて位数 2 のより一般的な自己同型を分類する。

3. 研究の方法

(1) 3 次元ファノ多様体は森と向井によって分類されているので、各々に対して全座標環を計算して、フェアリンデ型公式が成立するかどうかを調べた。

(2) 固定された多様体内の曲線の変形の障害類の非消滅に関しては、研究協力者 那須の学位論文において多様体が 3 次元射影空間の場合に良い充分条件が与えられたので、それをベースにしていろいろな試行錯誤を繰り返して一般の 3 次元多様体に拡張した。

(3) エンリケス曲面の数値的に自明な位数 2 の自己同型の研究においては、モジュライによる証明を完成させることと平行して、先行研究がなされた論文やその素となった諸論文を詳しく読み進めて、分類をより簡明にするヒントを探した。

4. 研究成果

(1) 永田型不変式環で有限生成になるだろうと予想されていた場合について、モジュライを使う証明を与え、数理解析研究所のプレプリント(#1502) "Finite generation of the Nagata invariant rings in A-D-E cases" (2005 年 5 月) にまとめた。

(2) 2 次元加法群の線形表現の不変式環がいつも有限生成ではないかという問題の特別な場合として Kronecker quiver の表現がある。直既約成分として preprojective なものを含まない場合に肯定的解答をえた。

(3) Kronecker quiver の不変式環に対しては、1 個の preinjective 表現の場合と regular 表現の直和(永田型)の場合には既にフェアリンデ公式に似た次元公式を得ていた。今回はそれを拡張するため、次の二つの場合に不変式環が Rees 環として表せることを示した。

- ① 1 個の preinjective 表現と永田型の直和,
- ② 2 個の preinjective 表現の直和で片方が 3 次元の場合.

(4) 次数 32 で primitive に偏極付けられた generic な K3 曲面が種数 5 の曲線上のベクトル束のモジュライ空間内の非可換 Brill-Noether 軌跡として表されることを証明した. 系として, そういう K3 曲面のモジュライが単有理的であることが従う.

(5) 指数 2 の 3 次元ファノ多様体内の曲線のヒルベルト概型が生成的に非被約な成分をもつことを余次元 1 部分多様体の「極付」無限小変形を使って証明した. 応用として一般の代数曲線 (種数 5) から一般の 3 次元 3 次超曲面への Hom 概型も生成的に非被約な成分をもつことがわかる. (研究協力者 那須と代表者向井の共同研究)

(6) エンリケス曲面の自己同型で数値的に自明なものでクンマー型のものの分類を数理解析研究所のプレプリント(#1544) "Numerically trivial involutions of Enriques surfaces" (2006 年 5 月) にまとめた.

(7) エンリケス曲面の位数 2 の自己同型で数値的に鏡映であるものは 2 種に分かれる. この中でクンマー型のを分類し、数理解析研究所のプレプリント(#1633) "Kummer's quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces" (2008 年 6 月) にまとめた.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Shigeru Mukai and Hirokazu Nasu: Obstructions to deforming curves on a 3-fold, I --- a generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes, to appear in J. Alg. Geometry, 査読有

- ② Shigeru Mukai; Geometric realization of T-shaped root systems and the Jacobians of del Pezzo surfaces, "Geometry in Osaka", Lecture Notes in Math. vol. 9, 134--136, Osaka University, (2008) 査読無
- ③ Shigeru Mukai: Polarized K3 surfaces of genus thirteen, Adv. Stud. Pure Math., **45**, 315-326, (2006), 査読有.

[学会発表] (計 5 件)

- ① Shigeru Mukai, Polarized K3 surfaces of degree 32, "Moduli Spaces", 2008 年 7 月 10 日, Univ. of Warwick, UK.
- ② Shigeru Mukai, Cohomologically trivial involutions of Enriques surfaces with application to Shioda-Inose structure, "Algebraic Geometry", 2008 年 7 月 2 日, Lorentz Center, Leiden, the Netherland,
- ③ Shigeru Mukai, Hilbert's 14th problem for the Kronecker quiver, "Algebraic geometry in higher dimensions", 2007 年 6 月 8 日, Levico Terme (Trento), Italy.
- ④ Shigeru Mukai, Hilbert's 14th problem and Verlinde type formulas for rings of invariant polynomials, Kuwait lecture, 2007 年 1 月 30 日, Cambridge Univ., England.
- ⑤ Shigeru Mukai, Hilbert's original 14th problem and certain moduli spaces, AMS Summer Institute on Algebraic Geometry, 2005 年 8 月 1-5 日, Seattle, U. S. A.

[図書] (計 1 件)

向井 茂, 岩波書店、モジュライ理論 I・II、2008, 458 頁. (改訂新版)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

向井 茂 (MUKAI SHIGERU)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号: 80115641

(2) 研究分担者

森 重文 (MORI SHIGEFUMI)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00093328
(平成17年度～19年度)

中山 昇 (NAKAYAMA NOBORU)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：10189079
(平成17年度～19年度)

阿部 健 (ABE TAKESHI)
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号：90362409
(平成17年度～19年度)

中村 郁 (NAKAMURA IKU)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50022687
(平成17年度～19年度)

蔵野 和彦 (KURANO KAZUHIKO)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：90205188
(平成17年度～19年度)

吉岡 康太 (YOSHIOKA KOTA)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40274047
(平成17年度～19年度)

竹内 聖彦 (TAKEUCHI KIYOHICO)
椋山女学園大学・教育学部・教授
研究者番号：30236418
(平成17年度～19年度)

高木 寛通 (TAKAGI HIROMICHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：30322150
(平成17年度～19年度)

井出 学 (IDE MANABU)
常葉学園大学・教育学部・講師
研究者番号：90367582
(平成17年度～19年度)

(3) 連携研究者

森 重文 (MORI SHIGEFUMI)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00093328
(平成20年度)

中山 昇 (NAKAYAMA NOBORU)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号：10189079

(平成20年度)

阿部 健 (ABE TAKESHI)
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号：90362409
(平成20年度)

中村 郁 (NAKAMURA IKU)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50022687
(平成20年度)

蔵野 和彦 (KURANO KAZUHIKO)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：90205188
(平成20年度)

吉岡 康太 (YOSHIOKA KOTA)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40274047
(平成20年度)

竹内 聖彦 (TAKEUCHI KIYOHICO)
椋山女学園大学・教育学部・教授
研究者番号：30236418
(平成20年度)

高木 寛通 (TAKAGI HIROMICHI)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：30322150
(平成20年度)

井出 学 (IDE MANABU)
常葉学園大学・教育学部・講師
研究者番号：90367582
(平成20年度)