

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340009

研究課題名(和文) 数論的多様体の代数的K理論の研究

研究課題名(英文) An research of algebraic K-theory of arithmetic varieties

研究代表者

竹田 雄一郎 (Yuichiro Takeda)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：30264584

研究成果の概要：

本研究の目的は、キューブや代数サイクルといった幾何的な対象を用いて、代数的 K 理論の元を構成する方法を確立することであった。得られた結果は次のとおりである。(1) 楕円曲面上の一次や二次のキューブで、その Bott-Chern 形式が Kronecker-Eisenstein 級数を用いて表されるものを構成した。(2) Goncharov により定義された代数的サイクル上の積分が、レギュレーター写像に一致することの証明を考案した。(3) Goncharov による代数的サイクル上の積分を Bloch のポリログサイクルに対して計算して、それがポリログ関数を用いて表わされることを示した。

交付額

(金額単位：円)

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2005年度 | 1,500,000 | 0       | 1,500,000 |
| 2006年度 | 1,600,000 | 0       | 1,600,000 |
| 2007年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| 2008年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 年度     |           |         |           |
| 総計     | 5,400,000 | 690,000 | 6,090,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的 K 理論, レギュレーター写像, Bott-Chern 形式, 代数サイクル

## 1. 研究開始当初の背景

代数体の上で定義された多様体の L 関数の特殊値が、レギュレーターとよばれる代数的 K 理論から Deligne コホモロジーへの写像を用いて記述される、ということを Beilinson は予想した。しかし、この予想が正しいこと

が確かめられている多様体の例は極めて少ない。その理由は、代数的 K 理論の構造が全く知られておらず、その元を構成することすら非常に困難である、という点にある。しかし近年、キューブとよばれる代数多様体上のベクトル束からつくられる幾何的な対象を用いて、その多様体の代数的 K 理論の元を表

示する方法が開発された。また、そのようにして得られた元のレギュレーター写像による像が、高次 Bott-Chern 形式とよばれる多様体上の微分形式によって記述されることも証明された。

それとは別に、Goncharov は、代数的サイクル上の積分を用いて、高次チャウ群から Deligne コホモロジーへの写像を構成した。彼の定義した写像は、高次 Bott-Chern 形式と深いつながりがあると筆者は予想したのだが、Goncharov 自身はそれがレギュレーター写像に一致することは証明しなかった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、代数的  $K$  理論の元を明示的に構成して、そのレギュレーターを計算する方法を開発することであった。具体的には、次のことを目標としていた。

(1) キューブとその Bott-Chern 形式を用いたレギュレーター写像の研究。適当なアーベル多様体の族を考え、その全空間上の特殊関数と代数的  $K$  理論を Bott-Chern 形式により結びつけることによって、その関数をレギュレーター写像の像としてもつようなアーベル多様体の代数的  $K$  理論の元を構成し、それをつかってアーベル多様体のレギュレーター写像を詳しく調べることを目標としていた。

(2) 代数サイクルとそれに対応するカルントを用いたレギュレーター写像の研究。Goncharov はポリログ関数の関数等式を用いて代数的  $K$  理論の元を組織的に構成することができることを予想した。本研究では、彼により開発された代数サイクル上の積分を用いて、この問題に取り組むことを考えていた。そして彼の予想を証明して、それを様々な多様体に適用することにより、レギュレーター写像の新しい研究手法を確立することを目標としていた。

## 3. 研究の方法

(1) 楕円曲線の族には、 $L$  関数の特殊値と関係の深い、数論的に重要な関数が存在する。本研究では、その族の上に、その Bott-Chern 形式がその関数を用いて表せるようなキューブを構成する。そのキューブを族のファイバーに制限することによって、楕円曲線上のキューブが得られ、それを用いて楕円曲線の代数的  $K$  理論の元を構成する。このようにして構成される代数的  $K$  理論の元のレギュレーター写像による像がもとの数

論的に重要な関数と関連づけられることは、すぐわかる。

(2) 代数サイクルを用いたレギュレーター写像の研究の方法は、次のとおりである。まず、Goncharov により定義された代数サイクル上の積分が実際にレギュレーター写像を記述していることを証明する。それから、Bloch により定義されたポリログサイクル上の積分を計算して、それがポリログ関数で表せることを確かめる。最後に生成元と関係式から得られるアーベル群の複体 (ポリログ複体) の情報を利用して、ポリログサイクルを組み合わせて多様体上の代数サイクルを構成する。

## 4. 研究成果

(1) について。本研究では楕円曲面上でこの問題を考察した。まず初めに、楕円曲線の族の上の次数1のキューブで、その Bott-Chern 形式が1次の Kronecker-Eisenstein 級数で表されるものを構成した。これは、楕円曲線の族の上で定義される直線束の Deligne ペアリングを使って定義される。次に、特別な次数1のキューブの Bott-Chern 形式は完全な微分形式であり、その積分として得られる微分形式が2次の Kronecker-Eisenstein 級数を用いて表されることを示した。そして、ある条件をみたす有理楕円曲面の上では、その Kronecker-Eisenstein 級数を Bott-Chern 形式として持つような2次のキューブを構成した。

このようにして得られた楕円曲面上の2次のキューブをファイバーに制限して、楕円曲線上の2次の代数的  $K$  群の元を構成することを試みた。有理楕円曲面のモデル・ベイユ格子の理論を用いることによって、ごく限られた場合にはあるが、楕円曲線の2次の代数的  $K$  群の元を構成することができた。

(2) Goncharov は、代数的サイクル上の積分を用いて、高次チャウ群から Deligne コホモロジーへの写像を構成したが、それがレギュレーター写像に一致することは証明しなかった。代数サイクル上の積分を具体的に計算することによってレギュレーター写像を研究する、という本研究の目的のためには、あらかじめこの一致を証明しておくことは必要不可欠である。筆者は、高次チャウ群に関する Levine の研究にアラケロフ幾何学の手法を組み合わせることにより、その証明の枠組みを作った。具体的には、iterated double とよばれる既約でない代数多様体 (球面の代数幾何における類似物) 上のチャーン類写像の理論を、ホモトピー代数を用いて構成することを目指した。しかし、その構成の詳細を調べて、その結果を論文にまとめるま

では至らなかった。

それとは別に、Goncharov の積分とレギュレーター写像との一致の別証明を見つけた。これは Felio 氏の学位論文の結果と筆者自身が上記の証明の詳細を研究している中で得られたある考察を組み合わせることによって得られる。このことを筆者は、2008 年 3 月に行った Barcelona 大学の Burgos 教授との討論の中で確認した。現在、共著の論文を作成中である。

また、Goncharov による代数サイクル上の積分を特別なサイクルに対して計算することによって、ポリログ関数が現れることがわかった。この結果は、これまでに指摘されてきたレギュレーター写像とポリログ関数との関係を、新しく説明するものであり、また、Goncharov の写像が本当にレギュレーター写像を与えることの状況証拠にもなっている。それから、その結果を用いて、代数体のレギュレーター写像に関する Zagier 予想の別証明を与えることができた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① Yuichiro Takeda, Higher Arithmetic K-theory, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 41, 599–681, (2005), 査読有
- ② Yuichiro Taguchi, On the finiteness of various Galois representations, Contemp. Math., 416, 249–261, (2006), 査読有
- ③ Yuichiro Taguchi and Hyunsuk Moon,  $l$ -adic properties of certain modular forms, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 82, 83–86, (2006), 査読有
- ④ Yuichiro Taguchi and Toshiro Hiranouchi, Extensions of truncated discrete valuation rings, Pure Appl. Math. Q., 4, 1205–1214, (2008), 査読有
- ⑤ Tohru Nakashima, Codes on Grassmann bundles and related varieties, J. Pure Appl. Algebra, 199, 235–244, (2005), 査読有
- ⑥ Tohru Nakashima, Strong Bogomolov inequality for stable vector bundles, J. Geom. Phys., 57, 1977–1983, (2007), 査読有
- ⑦ Masanori Asakura, Surjectivity of  $p$ -adic regulators on  $K_2$  of Tate curves, Invent. Math., 165, 267–324, (2006), 査読有
- ⑧ Masanori Asakura and Shuji Saito, Surfaces over a  $p$ -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, Algebra Number theory, 1, 163–181, (2007), 査読有

[学会発表] (計 8 件)

- ① 佐藤 栄一, On a condition for a variety to be a complete intersection, Castelnuovo-Mumford 量よその周辺の話題, 2006 年 2 月, 琉球大学.
- ② 竹田 雄一郎, A calculation of the regulator map via the higher Bott-Chern forms, Seminar on Arakelov geometry and Shimura varieties, 2006 年 4 月, Centre de Recerca matematica, Barcelona.
- ③ 田口 雄一郎, Moduli of Galois representations and their applications,  $p$ -adic method and its applications in arithmetic geometry, 2007 年 6 月, 東京大学.
- ④ 竹田 雄一郎, Zagier conjecture and explicit regulator maps, 第三回モチーフ勉強会, 2007 年 7 月, 東京大学.
- ⑤ 佐藤 栄一, Hyperplane section principle of Lefschetz on Mori cone, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2007 年 9 月, 九州大学.
- ⑥ 竹田 雄一郎, On explicit regulator maps, 2007 年 11 月, 東北大.
- ⑦ 田口 雄一郎, The non-existence of certain mod 2 Galois representations of some small quadratic fields, East Asia number theory conference, 2008 年 1 月, KAIST, 大田.

- ⑧ 竹田 雄一郎, On explicit regulator maps, 第4回代数・解析・幾何学セミナー, 2009年2月, 鹿児島大.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

竹田 雄一郎 (Yuichiro Takeda)  
九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
研究者番号：30264584

### (2) 研究分担者

田口 雄一郎 (Yuichiro Taguchi)  
九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
研究者番号：90231399

佐藤 栄一 (Eiichi Sato)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：10112278

稲場 道明 (Michiaki Inaba)  
京都大学・大学院理学研究科・講師  
研究者番号：80359934

### (3) 連携研究者

朝倉 政典 (Masanori Asakura)  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号：60322286

中島 徹 (Tohru Nakashima)  
日本女子大学・理学部・教授  
研究者番号：20244410