

平成21年5月25日現在

研究種目: 基盤研究(B)

研究期間: 2005-2008

課題番号: 17340013

研究課題名(和文) 同変オイラー標数積分・チャーン類理論とその関連分野

研究課題名(英文)

Equivariant theory of Chern classes, Integrals based on Euler characteristics and related topics

研究代表者

大本 亨 (OHMOTO, TORU)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号 20264400

研究成果の概要:

研究代表者の同変特異チャーン類理論を基礎に、種々のオビフォルド・特異チャーン類を定義した。特に、古典的群論における置換表現の数え上げ公式をオビフォルド特性類に拡張したものととして、代数多様体の対称積に関するオビフォルド・特異チャーン類の生成母関数公式を示した。これは、特異チャーン類理論の数え上げ幾何あるいはマッカイ対応への応用に向けた足場となる。

交付額

(金額単位: 円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	1,800,000	0	1,800,000
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
総計	5,100,000	660,000	5,760,000

研究分野: 数理系科学

科研費の分科・細目: 数学・幾何学

キーワード: 特異点論, 特性類, 特異チャーン類, トム多項式

1. 研究開始当初の背景

(1) 特異代数多様体のチャーン類理論(特異チャーン類)の代表格として、チャーン・マクファーソン自然変換がある(MacPherson, 1974)。これは、構成的関数を「可測関数」と見なした「オイラー標数測度による積分論」の一般化であって、全ホモロジー類に値を取る積分論といえる(ドリーニュ・グロタンディエック予想の解答である一種のリーマン・ロッホ型定理)。この拡張として、

研究代表者は、代数幾何的ボレル構成を用いて同変チャーン・マクファーソン変換を与えている(Ohmoto, 2006)。これは、より一般的な「相対モティヴィック積分論と自然変換」の先行研究と位置づけられる。

(2) 90年代以降、複素曲面の対称積のオビフォルド・オイラー標数とヒルベルトスキームのオイラー標数が一致することなど、いわゆる「(一般化された)マッカイ対応」の研究が、特に同変 K-

理論の観点から進められていた。一方、ジョイスらにより、オビフォルドあるいは代数的スタック上の構成的関数のオイラー標数積分論が展開されつつあった。それゆえ、このホモロジー特性類版を考えてマッカイ対応を研究する方向は有望である。事実、上述の(代表者の)同変チャーン類は商スタックに対する特異チャーン類とみなされる。

(3) 関数・写像に現れる特異点の「数え上げ」は、(仮想)基本類の degree 計算と見なせるし、また重み付きオイラー標数の計算とも解釈できる。前者の見方(基本類)は「トム多項式理論」に繋がり、後者の見方(オイラー標数)は「オイラー標数測度による積分論」に繋がる。両者を繋ぐものとして、特異チャーン類理論を考えることは自然である。

2. 研究の目的

本研究は、チャーン・マクファーソン自然変換の一般論の整備を行い、特異点の数え上げ理論への応用に向けた基盤を固めることを目指す。主要なテーマとして、基本的な対象として代数多様体の対称積を扱い、古典的群論の様々な数え上げ公式と対照する形で、対称積の特異チャーン類に関する生成母関数公式(一種のゼータ関数型公式)の一般論を開拓する。

3. 研究の方法

(1) 有限群作用に関する商スタックに対して、有理オイラー数やオビフォルド・オイラー数を一般化する形で、オビフォルド・特異チャーン類を定義する。特に、代数多様体の対称積について、古典的群論における置換表現(群準同型)の数え上げ公式(デイ・ヴォルフファールト公式)を雛形に、オビフォルド・特異チャーン類の基本公式を調べる。

(2) 関数・写像の特異点分類への同変特異チャーン類の応用として、擬斉次完全交叉特異点の

場合に、標準的なトラス作用に関して特異チャーン類を考える。そこでトム多項式理論の計算手法(リマーニ、カザリアン)のアイデアを援用する。

(3) 上述の(1)と対照する形で、商スタックのオビフォルド特異チャーン類と大域商の特異点解消のチャーン類との対比を行う(「特異チャーン類のマッカイ対応」)。特に、射影複素曲面上の0次元スキームのモジュライであるヒルベルト・スキーム(対称積の特異点解消)を考える。ゲッチュ、中島啓、レーンらによる仕事を元に、頂点代数公式を用いたボアセル(2005)の仕事があり、これを特異チャーン類を用いたアプローチから解釈し直すことから始める。

4. 研究成果

(1) 有限群の作用における同変特異チャーン類理論の応用として、商スタックに対して種々のオビフォルド特異チャーン類を定義した。特に、オビフォルド・オイラー標数が0次に対応するようなオビフォルド特異チャーン類は、代数幾何および数理物理で言われるところの「弦的チャーン類」に一致する。さらに、古典的群論を下敷きに、対称積のオビフォルド・特異チャーン類に関するデイ・ヴォルフファールト公式を与えた(Ohmoto, 2008)。この最も簡単な場合として、ゲッチュ、ヒルツェブルフらによるオビフォルド・オイラー標数に関する生成母関数公式の全ホモロジー類版、すなわち対称積の弦的チャーン類の母関数公式が得られる。

(2) 連続群の作用における同変特異チャーン類理論の応用として、擬斉次孤立完全交叉特異点芽のミルナー数公式をトラス同変チャーン類の局所化公式として明示した(論文準備中)。これは、グロイエール・ハム、レーンらにより古典的に知られているミルナー数公式を、トム多項式および特性類の局所化の立場から見直し、新しい解釈を与える。

(3) 上述の(1)における対称積の特異チャーン類公式と対照するかたちで, 射影曲面のヒルベルト・スキームのチャーン類に関する生成母関数公式を考察した(研究集会「多様体の幾何と特異点」報告集).

(4) 連携研究者の研究として, 與倉氏は両変理論(bivariant theory)の視点から代数的コホモロジー理論を研究した. 諏訪氏は, チェック・ドルボーコホモロジーを用いたアティヤ類の局所化を定式化した. 秋田氏は写像類群に関わる整係数リーマン・ロッホ定理について, 石川氏はルジャンドル特異点論の応用として同程度特異性の問題(ザリスキーの問題)について研究した. これらの研究は, (特異)多様体の特性類理論および特異点の数え上げ理論への応用に関連するものである.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

以下の論文はすべて査読有り.

- ①. 大本 亨, 特異点の数え上げと同変 Chern 類, 数学, 岩波書店(日本数学会編), 61 卷 1 号, 2009, 21--39.
- ②. S. Yokura, Oriented bivariant theories, I, International Journal of Mathematics, 掲載決定(30 pages),
- ③. S. Yokura, A universal bivariant theory and cobordism groups, Advanced Studies in Pure Mathematics, 掲載決定 (31 pages)
- ④. S. Yokura, Motivic characteristic classes, Proceedings of MSRI Workshop "Topology of Stratified Spaces" (MSRI Publications), 掲載決定(32 pages) (arXiv:0812.4584v1 [math.AG])
- ⑤. T. Ohmoto, Generating functions of orbifold Chern classes I: Symmetric Products, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 144 (2008), 423--438.
- ⑥. T. Akita, On mod p Riemann-Roch formulae for mapping class groups, Advanced Studies in Pure Math. 52 (2008), 111-118.

- ⑦. T. Akita, A formula for the Euler characteristics of even dimensional triangulated manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 2571-2573.
- ⑧. T. Akita and Nariya Kawazumi, Integral Riemann-Roch formulae for cyclic subgroups of mapping class groups, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 144 (2008) 411-421.
- ⑨. G. Ishikawa and S. Janeczko, Bifurcations in symplectic space, Banach Center Publ., vol. 82 (2008), 111-124.
- ⑩. A.A. Davydov, G. Ishikawa, S. Izumiya, W.-Z. Sun, Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane, Japanese Journal of Mathematics, vol. 3--1(2008) 93--119.
- ⑪. G. Ishikawa, Global classification of curves on the symplectic plane, Proceedings of the IX Workshop on Real and Complex Singularities, Sao Carlos, 2006, Contemp. Math. 459, Amer. Math. Soc., (2008), pp. 51--72.
- ⑫. T. Ohmoto, Chern classes and Thom polynomials, Proc. Trieste Singularity Summer School and Workshop (ICTP, Trieste, 2005) ed. J-P. Brasselet et al, World Scientific. (2007), 464-482
- ⑬. T. Suwa, Introduction to Complex Analytic Geometry, Proc. Trieste Singularity Summer School and Workshop (ICTP, Trieste, 2005) ed. J-P. Brasselet et al, World Scientific. (2007), 161--222.
- ⑭. T. Ohmoto, Equivariant Chern classes of singular algebraic varieties with group actions, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 140 (2006), 115-134
- ⑮. J-P. Brasselet, J. Shurmann S. Yokura, Classe de Hirzebruch et classes de Chern motiviques, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342-5 (2006), 325-328
- ⑯. T. Suwa, Residues for holomorphic foliations of singular pairs, Advances in Geometry 5 (2005), 81--95.
- ⑰. S. Yokura, Generalized Ginzburg Chern classes, Singularities Franco - Japonaises, Semin. Congr. 10, Soc. Math. France. 34 (2005), 429-442.

[学会発表] (計18件)

- ①. T. Ohmoto, Generating function of Chern classes of Hilbert schemes of points, 2008 年 9 月 12 日特異点と多様体の幾何 — 草津 2008 — 草津セミナーハウス
- ②. T. Ohmoto, Equivariant Chow groups and Chern classes, 研究集会「シューベルトカ

- リキュラスとその周辺」, 2008年3月18日, 関西セミナーハウス
- ③. T. Ohmoto, Thom polynomials and around I, II, 接触幾何とその関連分野, 2008年1月24日, 金沢大学サテライトプラザ
 - ④. T. Akita, Surface symmetries and group cohomology, 福岡微分幾何研究会, 2008年11月23日, 福岡大学セミナーハウス.
 - ⑤. G. Ishikawa, Local symplectic invariants of parametric Lagrangian varieties, Frobenius structures and singularity theory, 2008年8月26日, Bedlewo, Poland.
 - ⑥. G. Ishikawa, Classification of parametric varieties in the symplectic space: Motivations, Examples and Problems, 10th International Workshop on Real and Complex Singularities, 2008年7月31日, Sao Carlos, Brazil.
 - ⑦. S. Yokura, Motivic characteristic classes of singular varieties, Workshop Topology of Stratified Spaces, 2008年9月11日, MSRI, UC. Berkeley.
 - ⑧. T. Ohmoto, Thom polynomials and around, 研究集会「組み合わせ論的表現論の拡がり」, 2007年10月23日, 京都大学数理解析研究所
 - ⑨. T. Ohmoto, Computing Milnor numbers via Thom polynomials, Niigata Workshop on Complex Geometry and Singularities, 2007年8月20日, クロスパル新潟
 - ⑩. T. Akita, Surface symmetry, homology representations and group cohomology, Algebras, Groups and Geometries in Tambara, 2007年10月17日, 東大玉原国際セミナーハウス
 - ⑪. T. Akita, 曲面上の群作用と群のコホモロジー, 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」, 2007年8月30日, 京都大学数理解析研究所
 - ⑫. G. Ishikawa, Local classification of parametric Lagrangian varieties, International Conference "Symplectic Geometry", 2007年7月27日, 京都大学数理解析研究所
 - ⑬. G. Ishikawa, Classification problem in symplectic singularity theory, Banach Center Symposium "Geometric Singularity Theory" Polish-Japanese Working Days, 2007年7月9日, Sopot, Poland.
 - ⑭. T. Suwa, Localization of Atiyah classes, Seminario di Analisi Complessa, 2007年10月2日, Universita di Roma Tor Vergata, Italy
 - ⑮. T. Suwa, Localization of Atiyah classes, Niigata Workshop on Complex Geometry and Singularities, 2007年8月20日, クロスパル新潟

- ⑯. T. Ohmoto, Thom polynomials for complete intersection singularities, 日露複素解析幾何:「複素代数多様体上の解析と幾何」, 2006年12月14日, 京都大学数理解析研究所
- ⑰. 大本 亨, Chern classes and Thom polynomials -- Enumerative geometry of singularities, 代数幾何・城崎シンポジウム, 2005年10月27日, 兵庫県立城崎大会議館
- ⑱. T. Ohmoto, Chern classes and Thom polynomials, ICTP Advanced School and Workshop : Singularities in Geometry and Topology, 2005年8月24日, Trieste (Italy)

6. 研究組織

(1)研究代表者

大本 亨 (TORU OHMOTO)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号 20264400

(2)研究分担者

なし(注釈:下記連係研究者は18年度まで研究分担者扱い)

(3)連携研究者

與倉 昭治 (SHOJI YOKURA)
鹿児島大学・理学部・教授
研究者番号 60182680
諏訪 立雄 (TATSUO SUWA)
北海道大学・理学部・名誉教授
研究者番号 40109418
石川 剛郎 (GO-O ISHIKAWA)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号 50176161
秋田 利之 (TOSHIYUKI AKITA)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号 30279252