

平成 21 年 6 月 1 日現在

研究種目：基盤研究（B）  
 研究期間：2005～2008  
 課題番号：17340014  
 研究課題名（和文） WZWモデルと3次元多様体

研究課題名（英文） WZW model and 3-manifolds

## 研究代表者

吉田 朋好 (YOSHIDA TOMOYOSHI)  
 東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
 研究者番号：60055324

## 研究成果の概要：

ゲージ対称性を持った共形場理論におけるいわゆる「レベルのシフト」を Hitchin システムの枠組みでどう捉えられるのかという問題について、研究代表者は Hitchin システムにおける、プリム多様体の族から平坦接続のモジュライ空間への写像の1点逆像から得られるベクトル場を、プリム多様体の族の上の複素直線バンドルの正則切断の空間に作用する微分作用素に持ち上げることにより、「レベルのシフト」が自然に導かれることを示して解決した。「レベルのシフト」を幾何学的枠組みから示したものとしてこれは初めてのものである。また同時にこの微分作用素から共形ブロックのなすベクトル束の射影接続が得られることも示した。これらの結果を用いて研究代表者は共形ブロックの基底を具体的にテータ関数とテータ零値を用いて表示する結果を得た。これはおよそ2年前のことであるが、その当時は対称性のみを指針として式の形を求めることに終始していた。その後研究代表者は共形ブロックの基底を表すこれらの式に含まれる項の幾何学的解釈を明らかにすることに努め、最近になってほぼ全容が明らかになって来た。これはレベルを無限大にしたいわゆる古典極限を考える上において本質的な情報を与えるものである。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	1,600,000	0	1,600,000
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
総計	4,900,000	660,000	5,560,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：3次元多様体、共形場理論、量子不変量

## 1. 研究開始当初の背景

3次元多様体の量子不変量の研究は国内外を問わず組み合わせ的な手法によるものが主流を占め、Wittenがもともと提唱したゲージ理論からのアプローチはほとんど研究が進んでいなかった。Hitchinシステムによる方法がもっとも有効であろうと思われていたが、提唱者のHitchin自身が数年間の努力の末に放棄したこともあって、その後この方向からの追及は頓挫している感があった。AtiyahとHitchinはともにこの方法によるアプローチの提唱者であるが、彼ら自身の述懐によると、ゲージ対称性を持った共形場理論におけるいわゆる「レベルのシフト」をHitchinシステムの枠組みでどう捉えられるのかが分らなかったことが、最大の障害であったということである。

## 2. 研究の目的

3次元多様体の量子不変量は、2次元共形場理論のひとつであるWZWモデルに現れるコンフォーマル・ブロックに含まれる真空ベクトルの内積により得られることが、Wittenにより物理的考察から得られていた。WZWモデルのコンフォーマル・ブロックはリーマン面上の階数2の安定ベクトル束のモジュライ空間上の行列式直線束の正則切断の空間と同一視される。これらの正則切断は階数2の非可換テータ関数とよばれ、代数、幾何、数理物理などの各方面において極めて重要な役割をはたす。我々の研究の目的は、M. F. AtiyahとN. J. Hitchinによって提唱されたアーベル化の方法を発展させ、階数2の非可換テータ関数を、プリム多様体上で定義された古典的なリーマンテータ関数とテータ零値を用いて明示的に表示する公式を得ることであった。これによって非可換テータ関数の変換法則の具体的な計算が可能になる。この結果をさらに発展させ、3次元多様体の幾何学と量子不変量の関係を明らかにすることを目的とした。

## 3. 研究の方法

ゲージ理論、3次元多様体の不変量の研究は、位相幾何学、代数幾何学、非線形解析学、数理物理学等の各分野にまたがり、深い知識と理解が要求される。ゲージ理論については吉田、複素微分幾何、佐々木多様体については

二木が担当した。ツイスター空間は本多、結び目理論と量子不変量については村上が担当した。双曲多様体、3次元多様体の幾何構造については小島と研究協力者である蒲谷が担当した。タイヒミュラー空間論は志賀が担当した。

ゲージ理論と3、4次元多様体の研究は欧米を中心に急速に発展している。わが国においても位相幾何学、大域解析学などさまざまな分野の幅広い研究者に、この分野に興味を持つものが多数活躍しているので、研究集会に積極的に参加して交流を深めた。とくに東大、京大、名大、数理研などのゲージ理論、3、4次元多様体関係の研究者との研究交流などのため、旅費および招待講演費に大きな割合をさくことになった。また外国、とくに欧米の研究者との交流は必須不可欠であり、海外での研究集会への参加で情報収集、研究結果の発表をした。国内では土屋昭博(名大)、古田幹雄(東大)、深谷賢治(京大)、藤田玄(東大)、河野俊丈(東大)、森下昌巳(九大)、加藤晃史(東大)、織田孝幸(東大)など、国外ではS. K. Hansen (DTU), M. F. Atiyah (Edinburgh), N. J. Hitchin (Oxford), C. Teleman (U. C. Berkeley) などの研究者と有益な研究交流を持った。

近年、大域幾何学、数理物理と幾何学との境界領域を扱う専門雑誌が多数発行されており、関連図書の整備とともに、これらの購入を図った。

## 4. 研究成果

吉田 朋好

研究代表者はこの問題について、Hitchinシステムにおける、プリム多様体の族から平坦接続のモジュライ空間への写像の1点逆像から得られるベクトル場を、プリム多様体の族の上の複素直線バンドルの正則切断の空間に作用する微分作用素に持ち上げるにより、「レベルのシフト」が自然に導かれることを示して解決した。「レベルのシフト」を幾何学的枠組みから示したのとしてこれは初めてのものである。また同時にこの微分作用素から共形ブロックのなすベクトル束の射影接続が得られることも示した。これらの結果を用いて研究代表者は共形ブロックの基底を具体的にテータ関数とテータ零値を用いて表示する結果を得た。これはおよそ2年前のことであるが、その当時は対称性のみを指針として式の形を求めること

に終始していた。その後研究代表者は共形ブロックの基底を表すこれらの式に含まれる項の幾何学的解釈を明らかにすることに努め、最近になってほぼ全容が明らかになって来た。これはレベルを無限大にしたいわゆる古典極限を考える上において本質的な情報を与えるものである。また全体が物理における超対称性からなっていることが最近になって明確になって来ており、共形ブロックの基底を表すこれらの式が豊かな物理的、幾何学的内容を含んでいることが明らかになりつつある。当初、研究代表者の与えた式は複雑な表示を持っている上各項の幾何学的意味づけが明確でなかったため注目を引くことが少なかったが、これらの意味づけが明確になれば式の統一的で簡明な解釈も得られそれなりの支持が得られるものと考え。現在研究代表者が目指している最も重要な問題は 3 次元多様体の基本群の SU (2) 表現のチャーンサイモンズ不変量が代数的数であることの証明である。これは 3 次元双曲多様体の体積あるいはチャーンサイモンズ不変量の数論的性質、とくに代数的数か超越数かなどの問題に直接関連している。現在はこのような問題に対する有効な方法は全く知られていないが、3 次元トポロジーにとって非常に重要な問題であると考え。研究代表者は共形場理論がこの問題に対する有力な研究手段を提供すると予想している。その根拠は研究代表者の与えた式の古典極限をとらえる過程で得た研究代表者の感触であるが、決して根拠のうすいものとは思わない。共形場理論からの量子不変量の研究は組み合わせ的手法によるものの単なるやきなおしではなく、他の方法では近づけない問題への強力な手段を提供するものと考え。

#### 二木 昭人

佐々木多様体上の Einstein 計量, 佐々木-Einstein 計量の存在問題について研究した。M を Fano 多様体とし, S を M の標準直線束の同伴 U(1)-束の全空間とすると S は佐々木多様体になる。M が自明でないトラス作用を許容すれば, Reeb ベクトル場の変形にもなう佐々木構造の変形があるため, 佐々木-Einstein 計量が存在しうる余地が大きくなる。二木は  $(m + 1)$  次元トラスの作用を許す  $(2m + 1)$  次元佐々木多様体で“高さ一定のトーリックダイアグラム”で記述されるものは佐々木-Einstein 計量を持つことを証明した。特にトーリック Fano 多様体の標準直線束に同伴する U(1)-束の全空間は佐々木-Einstein 計量を持つ。このことを応用すると任意の自然数  $k$  に対し,  $S_2 \# S_3$  を  $k$  個連結和をとった 5 次元多様体  $k(S_2 \# S_3)$  は可算無限個の変形同値でないトーリック佐々木-Einstein 計量を持つこ

とを証明した。また別の応用として, トーリック Fano 多様体の標準直線束の全空間には完備な Ricci 平坦計量が存在することも証明した。

#### 本多 宣博

本多はツイスター空間の研究を代数幾何学と微分幾何学の手法を駆使することにより行った。とくにこれまで知られていなかったツイスター空間の数多くの例を具体的に構成し、それらのなすモジュライの空間の性質を調べた。これらは代数的でない複素多様体の例も多く含んでおり、極めて興味深いものである。

#### 小島 定吉

小島定吉は、低次元多様体のトポロジーの研究を 20 年間あまりの間一貫して続けてきた。とくに最近 10 年間ほどは、3 次元双曲多様体（曲率が負の一定値となるリーマン多様体）の研究を集中的に行い、この分野の日本での研究の第一人者となっている。

多くの重要な仕事をしてきたが、とくに 1998 年に発表された論文において錐型特異点（錐のように尖った特異点）をもった 3 次元双曲多様体の変形の大域的振る舞いに関する基本的な結果（大域的剛性定理）を証明した。この結果は、同時期に出版された Hodgson-Kerckhoff の論文で証明された局所剛性定理とともに、3 次元双曲的錐多様体の変形理論の基礎付けを完成した結果といえるものである。

#### 志賀 啓成

志賀は単葉函数や正則二次微分の空間とタイヒミュラー空間の関係について、研究を行った。「Riemann 面が変化したとき、その Riemann 面に生息するものはどのように変化するのか？」ということについて研究し、Riemann 面上に定義されたいくつかの基本的な函数、量の変化を明らかにした。また Riemann 面上の函数のいろいろな性質を研究した。例えば、BMO (bounded mean oscillation) 函数と Hardy 空間の双対性の研究がある。これは、単位円周で定義された 1 位の Hardy 空間（の境界値）の dual space と BMO 函数の空間が等しいという Fefferman (-Stein) の定理を Riemann 面で考えたものであり、一般の Riemann 面ではこの duality は成り立たないことを指摘した。一方、位相的に有限なときは duality が成立することも証明し、位相的に無限のときもある十分条件を与えることに成功した。

村上 斉

低次元トポロジーに関する研究を行ってきた。特に最近は結び目や3次元多様体の量子不変量を中心に研究した。1992年から1993年にかけて、3次元多様体の量子不変量が Casson 不変量を決定するという結果を得た。これは、その後大槻による有限型不変量および Le-村上順-大槻による普遍的量子不変量へと続く研究の先駆けとなっている。また、村上順との共同研究により、結び目の Jones 多項式の極限として結び目補空間の体積が得られるであろうという予想(体積)を提示した。これは量子不変量と幾何構造を結びつけるという画期的な予想であり、現在多くの研究者の注目を集めている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 25 件)

1. N.Honda, A new series of compact minitwistor spaces and Moishezon twistor spaces over them. to appear in J. reine angew. 査読有
2. N.Honda ,On a construction of the twistor spaces of Joyce metrics, II. to appear in J. Math. Soc. Japan. 査読有
3. N.Honda ,Explicit construction of new Moishezon twistor spaces, to appear in J. Differential Geom. 査読有
4. A.Futaki , H. Ono, Einstein metrics and GIT stability, to appear in Sugaku Expositions, Translation of [Sugaku, 60(2008), 175--202 (in Japanese)]. 査読有
5. A.Futaki, H.Ono ,G.Wang: Transverse K"ahler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, to appear in J. Differential Geometry. 査読有
6. H.Shiga, Denjoy-Wolff theorem on Riemann surfaces, to appear in the Proceedings of the "International Workshop of Teichmuller theory and Moduli Problems". 査読有
7. N.Honda ,Double solid twistor spaces: the case of arbitrary signature. Invent.

math. 174 , 463-504. (2008) 査読有

8. N.Honda ,On a construction of the twistor spaces of Joyce metrics, J. Algebraic Geom. 17 , 709-750. (2008) 査読有

9. A.Futaki ,Holomorphic vector fields and perturbed extremal K"ahler metrics, J. Symplectic Geom., Vol. 6, No. 2, 127-138. (2008) 査読有

10. A.Futaki, K.Cho, H.Ono : Uniqueness and examples of toric Sasaki-Einstein manifolds, Comm. Math. Phys., 277, 439-458. (2008) 査読有

11. N.Honda ,Equivariant deformations of LeBrun's self-dual metric with torus action, Proc. Amer. Math. Soc. 135 , 495-505. (2007) 査読有

12. N.Honda ,Twistor lines on Nagata threefold, J. Math. Kyoto Univ. 47 837-848. (2007) 査読有

13. N.Honda ,Self-dual metrics and twenty-eight bitangents, J. Differential Geom. 75 , 175-258. (2007) 査読有

14. H.Murakami, Various generalizations of the volume conjecture. The interaction of analysis and geometry, 165-186, Contemp. Math., 424, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. 査読有

15. H.Murakami ,A version of the volume conjecture. Adv. Math. 211, no. 2, 678-683. (2007) 査読有

16. H.Murakami, Y. Yokota, The colored Jones polynomials of the figure-eight knot and its Dehn surgery spaces. J. Reine Angew. Math. 607, 47-68. (2007) 査読有

17. H.Murakami ,The colored Jones polynomials and the Alexander polynomial of the figure-eight knot. JP J. Geom. Topol. 7, no. 2, 249-269. (2007) 査読有

18. T.Yoshida ,An abelianization of SU(2) WZW model, Annals of Mathematics. 164,1-49 , (2006) 査読有

19. A.Futaki ,Harmonic total Chern forms and stability, Kodai Math. J. Vol. 29, No. 3, 346-369. (2006) 査読有

20. N.Honda, Non-Moishezon twistor spaces of  $4CP^2$  with non-trivial automorphism group, Trans. Amer. Math. Soc. 358, 1897-1920. (2006) 査読有

21. S.Kojima, S. Mizushima, S. P. Tan, Circle Packings on Surfaces with Projective Structures : LMS Lecture Note Series 329, 337-353. (2006) 査読有

22. S.Kojima, Mizushima, S. P. Tan, Circle Packings on Surfaces with Projective Structures and Uniformization, Pacific J. Math., 225, 287-300. (2006) 査読有

23. H.Murakami, A quantum introduction to knot theory. Primes and knots, 137-165, Contemp. Math., 416, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006. 査読有

24. H.Shiga, On the hyperbolic length and quasiconformal mappings. Complex Variables, 50: p. 123--130. 2005 査読有

25. H.Shiga, On complex analytic properties of limit sets and Julia sets. Kodai Math. J. 28: p. 368--381. 2005 査読有

[学会発表] (計 24 件)

1. H.Shiga, Monodromy and Complex Structures of Surface Fibrations, Complex Analysis and Dynamics Seminar, 2009/03/13, Teichmüller Theory: Graduate Center of CUNY

2. T.Yoshida, An asymptotic behavior of basis elements of conformal blocks of  $SU(2)$  WZW model in the large level, Low dimensional topology and number theory, March 17-20, 2009, Fukuoka Soft Research Park Center, Japan

3. A.Futaki, Multiplier ideal sheaves and integral invariants, ``Variational problems in differential geometry'', 30 March - 2 April, 2009, University of Leeds.

4. A.Futaki, Toric Sasaki-Einstein Geometry, ``Extremal Kaehler Metrics and Kaehler-Ricci Flow'', 14 March 2008, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Scuola Normale Superiore Pisa, Italy.

5. N.Honda, A new series of compact minitwistor spaces and Moishezon twistor spaces over them, In: Geometry of complex manifolds III, 2008年7月4日, Luminy, France

6. H.Shiga, Modulus of continuity, a Hardy-Littlewood theorem and its application, The 16th ICFAA 2008/07/29, Dongguk University, Gyeongju, Korea

7. S.Kojima, Entropy vs Volume, 研究集会「KIAS Workshop on Hyperbolic Geometry and Related Topics」, 2008/12/15-17, KIAS, Korea,

8. T.Yoshida, An asymptotic behavior of basis elements of conformal blocks of  $SU(2)$  WZW model in the large level, Colloquium talk at Denmark Technical University, April 1 2007, Copenhagen, Denmark

9. N.Honda, Explicit examples of algebraic twistor spaces, In: 2007 Sogang Geometry and Complex Analysis Symposium, 2007年5月26日, Seoul, Korea,

10. H.Murakami, An introduction to the volume conjecture, A second time around the volume conjecture, May 31, 2007, Louisiana State University

11. S.Kojima, Comparison of hyperbolic volumes with other invariants, 研究集会「Workshop on hyperbolic structures on 3-manifolds and large scale geometry of Teichmüller space」, 2007/7/16-20, Warwick, England

12. A.Futaki, Complete Ricci-flat Kähler metrics on the canonical bundles of toric Fano manifolds, ``International School-Conference, GEOMETRY and QUANTIZATION'', September 9-23, 2007. Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

13. N.Honda, Generalization of double solid twistor spaces into arbitrary signature, In: The 13th International Symposium on Complex Geometry, 2007年10月27日, 信州菅平高原、プチホテルズンタツ

ク、

14. H. Shiga, On conformal mappings of invariant components of Kleinian groups, International Workshop on Teichmüller Theory and Moduli Problems, 2006/01/08, Harish-Chandra Reserach Institute

15. S. Kojima, Packings on surfaces I, ISM S. Kojima, Symposium 「Packing and Random Packing」, Circle packings on surfaces with projective structures, The XXth 2006/3/1-3, ISM (統計数理研究所)

16. H. Shiga, On conformal mappings of invariant components of Kleinian groups, Topology and Geometry Seminar, 2006/03/08, National University of Singapore

17. T. Yoshida, A construction of basis elements of SU(2) WZW model, Colloquium talk, March 30 2006, Kansas State University, USA

18. S. Kojima, Packings on projective Riemann surfaces, 研究集会「Teichmüller Spaces (Classical and Quantum)」, 2006/5/29-6/2, Oberwolfach, Germany

19. H. Shiga, Conformal mappings of invariant components of Kleinian groups, The international conference of complex analysis and potential theory, 2006/09/11, Gebze Institute of Technology

20. A. Futaki, Toric Sasaki-Einstein metrics, 2006年10月25日, 第12回複素幾何シンポジウム, 信州菅平高原、プチホテルゾントック

21. N. Honda, Explicit construction of the twistor spaces of Joyce metrics, In: Geometry of complex manifolds II, 2006年10月17日, Luminy, France

22. S. Kojima, Circle packings of surfaces with projective structures, The XXth Nevanlinna Colloquium, 2005/8/8-13, EPF Lausanne

23. A. Futaki, Harmonic total Chern forms and stability, 2005年10月26日

-10月29日, 第11回複素幾何シンポジウム, 信州菅平高原、プチホテルゾントック

24. A. Futaki, Stability and canonical Kahler metrics, Workshop on Interactions between Complex Geometry and Real Analysis, September 25 - October 1, 2005, Hannover

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]  
○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉田 朋好 (YOSHIDA TOMOYOSHI)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 60055324

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

二木 昭人 (FUTAKI AKITO)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 90143247

本多 宣博 (HONDA NOBUHIRO)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 60311809

小島 定吉 (KOJIMA SADAYOSHI)  
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授  
研究者番号: 90117705

志賀 啓成 (SHIGA HIROSHIGE)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 10154189

村上 斉 (MURAKAMI HITOSHI)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 70192771