

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340015

研究課題名（和文） 離散群の剛性の幾何学的手法による研究

研究課題名（英文） Study of rigidity of discrete groups by geometric methods

研究代表者

納谷 信(NAYATANI SHIN)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70222180

研究成果の概要：

組合せ調和写像をランダム群の固定点性質の解明に応用する研究を行った。成果として、三角モデルのランダム群があるクラスに属するCAT(0)空間のすべてに対して固定点性質を持つという結果を得た。また、グラフモデルのランダム群がより広いクラスに属するCAT(0)空間のすべてに対して固定点性質をもつことを証明した。これらCAT(0)空間のクラスは、ある不変量 δ を用いて記述されるので、不変量 δ を上から評価する問題に取り組んだ。CAT(0)空間の接錐の歪み係数を用いて上から評価できることを明らかにし、ユークリッド的ビルディングの場合にこの評価を実行した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	4,500,000	0	4,500,000
2006年度	4,200,000	0	4,200,000
2007年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2008年度	2,800,000	840,000	3,640,000
総計	14,500,000	1,740,000	16,240,000

研究分野：微分幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：離散群，ランダム群，固定点性質，CAT(0)空間，不変量 δ ，歪み係数

1. 研究開始当初の背景

すでに確立している研究手法として、リーマン多様体から非正曲率リーマン多様体（あるいは弱い特異性をもつ非正曲率距離空間）への調和写像の存在を用い、その全測地性あ

るいは複素解析性を証明するという方法があった。一方、研究代表者と連携研究者・井関裕靖は、単体複体からCAT(0)空間（アレクサンドロフの意味での非正曲率距離空間）への調和写像の類似物 -- 組合せ調和写像 -- を考

えることにより、単体複体の基本群であるような離散群(典型例として p 進代数群の格子を含む)の剛性を研究する新しい手法を確立していた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、離散群の剛性に関わる種々の問題を微分幾何・幾何解析の手法を用いて総合的に研究することである。背景で言及した研究代表者等の研究成果をふまえて、同研究をさらに発展させるとともに、新しい問題意識や研究手法の創出を目指す。

3. 研究の方法

背景で言及した研究代表者等の結果を、定義空間が単体複体とは限らない、より一般の離散空間である場合に一般化し、とくに、離散群にその表示から定まるウェイトを定めた離散空間に対して固定点定理を定式化した。また、 n ステップエネルギーの増大度評価から固定点性質を導くというGromovの手法を別証明・精密化した。さらに、CAT(0)空間の不変量 δ と歪み係数との関係について考察した。

4. 研究成果

研究代表者・納谷信は、連携研究者・井関裕靖、研究協力者・近藤剛史と共同で、組合せ調和写像の超剛性、固定点定理への応用の研究を行った。

まず、公表論文

H. Izeke, S. Nayatani : Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces, *Geometriae Dedicata* 114 (2005), 147-188

の結果を、定義空間が単体複体とは限らない、より一般の離散空間(群作用およびウェイト付き)である場合に一般化した。これにより、離散群にその表示から定まるウェイトを定めた離散空間に対して固定点定理を定式化することが可能になった。このこと的应用として、

三角モデルのランダム群があるクラスCAT(0)空間のすべてに対して固定点性質を持つことが証明できた。ここで、あるクラスとは、上記公表論文において導入した不変量 δ (0から1までの値をとる)が上から定数 C ($<1/2$)で押さえられたCAT(0)空間全体のなすものである。上記の結果は、Zukによる、ランダム群がKazhdanの性質(T)をもつ(これはHilbert空間に対して固定点性質をもつことと同値である)という結果の一般化である。

また、スケール超極限のもとで閉じているCAT(0)空間のクラスに対して固定点定理を定式化した。その主張に、離散空間とそのようなCAT(0)空間のクラスの組に対して定義される定数が現れるが、この定数は、クラスとしてHilbert空間の全体をとった場合にはKazhdan定数と一致し、Kazhdan定数の一般化と考えられるものである。

次に、グラフモデルのランダム群がKazhdanの性質(T)を持つという事実(Gromovによる)のSilbermanによる証明を詳細に検討し、この結果を一般化して同じモデルのランダム群があるクラスに属するCAT(0)空間のすべてに対して固定点性質をもつという結果を得た。ここで、あるクラスとは、不変量 δ が上から定数 C (<1)で押さえられたCAT(0)空間全体のなすものである。

そこで、不変量 δ を上から評価する問題に取り組み、CAT(0)空間の接錐の歪み係数(ユークリッド空間にできる限り等長的に近くなるように埋め込んだときの等長写像からのずれをはかる不変量)を用いて上から評価できることを明らかにした。とくに、ある系列のユークリッド的ビルディングの接錐の歪み係数を上から評価することにより、次元が上から押さえられたときに、ビルディングの不変量 δ が上から定数 C (<1)で抑えられることが分かった。このことから、グラフモデルのラ

ランダム群が、この系列に属し、次元が上から抑えられたすべてのビルディングに対して固定点性質をもつことを示すことができた。

現在、グラフモデルのランダム群の固定点性質に関する論文（井関裕靖、近藤剛史と共著）を執筆中である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計4件）

1. 井関裕靖, 近藤剛史, 納谷信, Fixed-point property of random groups, to appear in *Annals of Global Analysis and Geometry* 35 (2009), 363–379, 査読あり.

(2008年11月にオンラインで出版済み, 17p)

2. 井関裕靖, 納谷信, 調和写像による超剛性定理および固定点定理へのアプローチ, *数学* (岩波書店), 査読あり, 158 (2006), 239 – 262.

3. 井関裕靖, 近藤剛史, 納谷信, A fixed-point theorem for discrete-group actions on Hadamard spaces, *数理解析研究所講究録* 1492 (2006) 「一般・幾何学的トポロジーと幾何学的群論」, 56 – 64, 査読あり.

4. 井関裕靖, Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces, *Geom. Dedicata* 114 (2005), 査読あり, 147–188.

〔学会発表〕（計13件）

1. 納谷信, 離散群の固定点性質と調和写像, 大阪市立大学幾何学セミナー, 2009年1月14日, 大阪市立大学.

2. 井関裕靖, A fixed-point property of discrete groups and energy of equivariant maps, 1st MSJ-SI ‘‘Probabilistic Approach to Geometry’’, 2008年8月5日, 京都大学.

3. 納谷信, Fixed-point property of random groups via energy of maps, *Geometric Group Theory, Geometric Analysis, and Mapping Class Groups*, 2008年5月3日–5日, Johns Hopkins University.

4. 納谷信, 離散群の固定点性質と多面体の \mathbb{R}^N への埋め込み, 金沢大学談話会, 2008年3月6日, 金沢大学.

5. 納谷信, Fixed-point property of discrete groups via harmonic maps, *International Conference ‘‘Variational Problems in Geometry’’*, 2007年9月18日–20日, 仙台.

6. 納谷信, 群の表示から定まるグラフ達の第1固有値について, 福岡大学微分幾何研究集会, 2007年2月1日–2月4日, 福岡大学セミナーハウス.

7. 納谷信, ボホナー技法と超剛性・固定点定理, 研究集会「離散群論と作用素環論」, 2007年1月9日–11日, 京都大学数理解析研究所.

8. 井関裕靖, 固定点性質と同変写像のエネルギー, RIMS共同研究「離散群と作用素環論」, 2007年1月9日, 京都大学数理解析研究所.

9. 納谷信, Superrigidity and fixed-point property of discrete groups via harmonic maps, 第2回日中友好幾何学研究集会, 2006年12月15日–21日, 雲南師範大学, 昆明, 中国.

10. 井関裕靖, Fixed-point property of discrete groups, 研究集会「大域解析と微分幾何 --- その情報科学への関わり ---」, 2006年10月22日, 東北大学大学院情報科学研究科.

11. 井関裕靖, ランダム群に対する固定点定理, 第49回函数論シンポジウム, 2006年9月15日, 東京工業大学.

12. 納谷信, Fixed-point properties of random groups, 日中幾何学研究集会, 2005年12月20日-12月23日, 唐山市虹の松原ホテル.

13. A fixed-point theorem for discrete-group actions on Hadamard spaces, 研究集会「一般・幾何学的トポロジーと幾何学的群論」, 2005年10月12日, 京都大学数理解析研究所.

[図書] (計1件)

納谷信, 調和写像と剛性, 微分幾何学の最先端 --- Surveys in Geometry, special edition (中島啓 編著), 培風館, 2005, 188 -- 221.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

納谷 信 (NAYATANI SHIN)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号: 70222180

(3) 連携研究者

佐藤肇 (SATO HAJIME)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・名誉教授
研究者番号: 30011612

江尻典男 (EJIRI NORIO)
名城大学・理工学部・教授

研究者番号: 80145656

金井雅彦 (KANAI MASAHIKO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授

研究者番号: 70183035

中西敏浩 (NAKANISHI TOSHIHIRO)
島根大学・総合理工学部・教授

研究者番号: 00172354

小谷元子 (KOTANI MOTOKO)
東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 50230024

内藤久資 (NAITO HISASHI)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号: 40211411

井関裕靖 (IZEKI HIROYASU)
東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 90244409

鎌田博行 (KAMADA HIROYUKI)
宮城教育大学・教育学部・准教授

研究者番号: 00249799

糸健太郎 (ITO KENTARO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授

研究者番号: 00324400