

平成21年3月15日現在

研究種目：基盤研究（B）  
 研究期間：2005～2008  
 課題番号：17340030  
 研究課題名（和文）動的計画法による制御積分方程式と数理ファイナンスの研究

研究課題名（英文）STUDY OF CONTROLLED INTEGRAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL FINANCE THROUGH DYNAMIC PROGRAMMING

## 研究代表者

岩本 誠一 (IWAMOTO SEIICHI)  
 九州大学大学院・経済学研究院・教授  
 研究者番号：90037284

研究成果の概要：本研究では、新たに導入した「非決定性」動的計画法の機能を探るために、積分方程式に制御項を付加した制御積分方程式と数理ファイナンスにおけるオプション評価への適用可能性を調べた。また、既存の「確定的」動的計画法および「確率的」動的計画法との比較を性能面・応用面において検討した。結果として、非決定性動的計画法は既存の2つの動的計画法よりもより広範な動的最適化問題を解決し得る第3の動的計画法であることがわかった。また、制御積分方程式は非決定性動的最適化システムにおけるベルマン方程式に他ならないことが判明した。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,900,000	0	3,900,000
2006年度	3,500,000	0	3,500,000
2007年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2008年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
年度			
総計	14,500,000	2,130,000	16,630,000

研究分野：計画数学、動的計画法

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：動的計画法、ベルマン方程式、非決定性、制御積分方程式、黄金最適解、フィボナッチ最適解、黄金相補双対、フィボナッチ相補双対

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究では動的計画法 (dynamic programming, DP) を新たな観点から研究する。ここでは①「非決定性」動的計画法 (non-deterministic DP) を導入する。その背景としては既存の②「確定的」動的計画法 (deterministic DP) および③「確率的」動的計画法 (stochastic DP) がこれまでよく研究され、応用されてきた事実がある。

(2) 「非決定性」は本来計算機科学における概念である。オートマトンは「認識する」逐次機械であり、DP は「最適化する」逐次機械である。しかし、DP にはこれまで「非決定性」という概念はなかった。

(3) 「非決定性」という意味で「最適化機械」とはどういうものであろうか。「認識」と「最適化」の違いはどこに、どのように表れるのだろうか。

(4) いわゆる積分方程式は微分方程式と同様に広く研究され、種々の分野に応用されているが、その経済学的解釈はほとんどなされていないようである。方程式の解とその解釈を決定論的立場から見ることはこれまでなされていないようである。

(5) ましてや、制御／決定項をもつ積分方程式または微分方程式（制御積分方程式または制御積分方程式）の解とその経済的解釈を決定論的見地から検討することはなされていない。

## 2. 研究の目的

(1) 「非決定性」動的計画法(NDP)の機能を既存の2つのDPと比較検討し、どのような点が斬新で、どのような展開が可能かを探る。

(2) NDPにどのような応用があるかを考察する。特に、①制御積分方程式を新たに導入して、その性質・解を明らかにする。また、②数理ファイナンスのオプション評価にNDPがどこまで有用であるかを見極める。

(3) いわゆる積分方程式はFredholm型とVolterra型に大別されるが、新たに制御項を付加して最適（最大／最小）化演算を作用させて、制御積分方程式を導入すると、2つの型がどのような最適構造をもつかを検討する。

(4) Fredholm型制御積分方程式の解をclosed formで求めるために、まず評価関数を1次または2次に限定して、種々の確率的推移関数に対して最適値関数と最適政策を陽に求める。次に、その他の評価関数に対しても解析解を追求する。

(5) Volterra型制御積分方程式に対しても、(4)と同様に解析解がどこまで求められるか、計算を行う。

(6) 動的計画法は元来所与の動的最適化問題を解く手段として用いられてきたが、本研究では最適方程式であるベルマン方程式自身を直接導入してこれを解析的に解くことによって、逆にどのような動的最適化問題群が得られるかを調べる。

(7) 既存の確定的動的計画法および確率的動的計画法における成果と非決定性動的計画法における成果を比較検討する。また、既存の積分方程式における成果と制御積

分方程式における成果の類似点・相違的を探る。

## 3. 研究の方法

(1) まず、非決定性ダイナミクスが①確定的にも②確率的にもなり得ることを種々の具体例を通して確認する。

(2) 次に、理論的な面として、推移加重関数が①有界と②非有界では、次期状態空間にどのような影響があるかを検討する。

(3) さらに、NDPの、経済学・理工学・ORへの応用・適用を考える。

(4) また、数理統計学の分布論を推移加重関数にあてはめた時、ベルマン方程式の解—解析解—を具体的に求める。特に、解をclosed formで表現できるか、否かを検討する。

(5) 数学的には積分方程式におけるピカールの逐次近似法が制御積分方程式ではどのような形になるか、議論する。特に、ベルマン方程式の解の存在と一意性を調べる。

## 4. 研究成果

(1) 確定系・確率系・非決定性の3つのダイナミクスの包含関係を具体的に調べた。特に、非決定性が確率的を真に含むことを確認し、新たに非有界推移加重関数が**黄金最適解**を生むところを突き止めた。

(2) さらに2次評価の最適化においては**フィボナッチ相補双対定理**および**黄金相補双対定理**を導いた。この双対定理はいわゆる既存の双対定理とは異なる2次最適化固有の性質である。ここでは最適解の対は「フィボナッチ経路」および「黄金経路」であることが示された。

(3) 非決定性動的最適化の最初の具体例として2倍対3倍競合過程を導入し、そのベルマン方程式をFredholm型とVolterra型の最適解をclosed formで求め、その**経済動学的解釈**を与えた。

(4) 数理ファイナンスにおいて新型のデリバティブを導入して、その**動的価格付け**(dynamic pricing)を行った。ここでの評価系は経路に依存する**非線形**(非加法的)である。とくに、オプションおよび満期日の動的評価(dynamic evaluation)を期待値のみならず、**分散・閾値確率**に対し

でも行った。さらに種々の確率変動型満期日をもつオプションの開発とその再帰的評価を進めた。

- (5) 確定的2次評価系において黄金相補双対定理 (Golden Complementary Dual Theorem) およびフィボナッチ相補双対定理 (Fibonacci Complementary Dual Theorem) を導いた。これらは数理計画における既存の Complementary Slackness Theorem とは異なるものである。
- (6) (5)の成果は「最適化」における結果であるが、この双対性をさらに「不等式」、「恒等式」において表現した。この3つ組を有限変数問題ではフィボナッチの三つ組 (Fibonacci Triplet) として、また無限変数では黄金の三つ組 (Golden Triplet) としてまとめた。ここでは3つが同値であることが証明された。
- (7) 確率的動的計画として数理統計学における基本的な確率分布を推移確率に取り込んで一群のベルマン方程式を導き、その解析解を closed form で表現した。
- (8) さらに非決定性動的計画法として非有界推移加重関数を用いて黄金最適解(最適値関数・最適政策)を求めた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- ① S. Iwamoto, Cross dual on the Golden optimum solutions, 「経済の数理解析」、京大数理研講究録1443、pp. 27—43、2005年、査読無。
- ② S. Iwamoto, Prominent Books and Articles in the 20th Century: Richard E. Bellman, Dynamic Programming (Japanese), Information Processing (Society of Japan), Vol. 46, pp.842, 2005, 査読有。
- ③ S. Iwamoto and A. Kira, On Golden inequalities, “The Development of Information and Decision Processes”, 京大数理研講究録1504、pp.168-176, 2006年、査読無。
- ④ S. Iwamoto, The Golden optimum solution in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers,

pp.109—205, 2007, 査読有。

- ⑤ S. Iwamoto, Golden optimal policy in calculus of variation and dynamic programming, Advances in Mathematical Economics 10, pp.65—89, 2007, 査読有。
- ⑥ S. Iwamoto and M. Yasuda, Golden optimal values in discrete-time dynamic optimization processes, “The Development of Probability Models on Optimization Problems”, 京大数理研講究録1559、pp.56-66, 2006年、査読無。
- ⑦ 岩本 誠一、動学的最適化における黄金最適政策、小特集：経済分析と最適化の数理、『三田学会雑誌』(慶應義塾経済学会)99巻、pp. 101—125、2007年、査読無。
- ⑧ A. Kira and S. Iwamoto, Golden complementary dual in quadratic optimization, Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, pp.191—202, 2008, 査読有。
- ⑨ S. Iwamoto and A. Kira, The Fibonacci complementary duality in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007, Taiwan), in press. 査読有。
- ⑩ S. Iwamoto and M. Yasuda, Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes, Ed. S. Elaydi, K. Nishimura and M. Shishikura, Advanced Studies in Pure Mathematics 53, ICDEA2006, pp.99-108. 2009, 査読有。

[学会発表] (計5件)

- ① S. Iwamoto, The Golden Optimum Solution in Quadratic Programming, The Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA05), July 1<sup>st</sup> 2005, Okinawa Convention Center, Okinawa.
- ② S. Iwamoto, Dynamic Pricing of Pacific Option, The Seventeenth Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS2005), July 13<sup>th</sup> 2005, Hilton Hawaiian Village Beach Resort and Spa.
- ③ S. Iwamoto, Golden Optimal Path in Discrete-Time Dynamic Optimization Processes, The 15-th International Conference on Difference Equations and Applications (ICDEA 2006), July

- 25<sup>th</sup> 2006, Kyoto University, Kyoto.
- ④ S. Iwamoto, The Fibonacci Complementary Duality in Quadratic Programming, The Fifth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA07), June 1<sup>st</sup> 2007, National Tsing-Hua University, Hsinchu Taiwan.
- ⑤ A. Kira, Fibonacci Complementary Duality in Optimization, The Thirteenth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, July 8<sup>th</sup> 2008, University of Patras, Patras, Greece.

[図書] (計 2 件)

- ① 時永祥三・高木昇・池田欽一、九州大学出版会、「経済・経営情報リテラシーの基礎」、2008 年、p. 190.
- ② 時永祥三・呂健軍、九州大学出版会、「情報経済のマクロ分析」、2008 年、p. 232.

[その他]

ホームページ等

<http://www.en.kyushu-u.ac.jp/iwamoto/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岩本 誠一(IWAMOTO SEIICHI)  
九州大学・大学院経済学研究院・教授  
研究者番号：90037284

### (2) 研究分担者

安田 正實(YASUDA MASAMI)  
千葉大学・普遍教育センター・教授  
研究者番号：00041344

時永 祥三(TOKINAGA SYOZO)  
九州大学・大学院経済学研究院・教授  
研究者番号：30124134

松本 浩一(MATSUMOTO KOICHI)  
九州大学・大学院経済学研究院・准教授  
研究者番号：30380687

川崎 英文(KAWASAKI HIDEFUMI)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：30124134

前園 宣彦(MAESONO YOSHIHIKO)  
九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：30173701

丸山 幸宏(MARUYAMA YUKIHIRO)  
長崎大学・経済学部・教授  
研究者番号：17301310

津留崎 和義(TSURUSAKI KAZUYOSHI)  
長崎大学・経済学部・准教授  
研究者番号：50336145

藤田 敏治(FUJITA TOSHIHARU)  
九州工業大学・工学部・准教授  
研究者番号：60295003

中井 達(NAKAI TORU)  
千葉大学・教育学部・教授  
研究者番号：20145808

### (3) 研究協力者

モーセ スニードヴィッチ  
(MOSHE SNIEDOVICH)  
メルボルン大学・数学/統計・名誉教授

