様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21年　6月12日現在

研究種目：基盤研究（B）
研究期間：2005～2008
課題番号：17340033
研究課題名（和文）　シュレディンガー方程式の解の特異性の研究

研究課題名（英文）　Singularities of solutions to Schrödinger equations

研究代表者
中村　周（NAKAMURA SHU）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号　50183520

研究成果の概要：

シュレディンガー方程式の解の特異性の伝播に関する研究を行い、特に、非束縛的な仮定の下で､解の超局所特異性を古典力学的散乱理論を用いて特徴づけることに成功した｡この成果は、当初はユークリッド空間上の短距離型摂動の場合に証明され、さらに長距離型摂動、散乱多様体、摂動を持つ調和振動子、また解析的特異性の特徴付けへと拡張された。また、実解析的な平滑化作用に関する研究成果も得た。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2005年度	4,200,000	0	4,200,000
2006年度	3,600,000	0	3,600,000
2007年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
2008年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
年度			
総　計	15,000,000	2,180,000	17,180,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：偏微分方程式・量子力学・超局所解析

1．　研究開始当初の背景

(1) 量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式は、古典的な物理学系の時間発展を記述する偏微分方程式である波動方程式、マックスウェル方程式、熱方程式などとは、偏微分方程式のコーシー問題として著しく異なる性質を持ち。特異型と呼ばれている。特に、解の(超局所的)特異性の時間発展については、未知の部分が大きく、極めて限られた理解しか得られていなかった。

(2)シュレディンガー方程式の特異性、あるいは平滑化作用は、それ自身の興味だけでなく、非線形シュレディンガー方程式への応用においても有意義である。非線形シュレディンガー方程式の解の存在定理、散乱理論などは、自由なシュレディンガー方程式の解の性質に強く依存しており、それらをポテンシャルや磁場、また計量の摂動がある場合に拡張するのは、未解決の問題が多い研究領域であり、多くの活発な研究が行われている。

２．研究の目的

(1)シュレディンガー方程式は、波動方程式などと異なり、対応するニュートン方程式から決まる古典力学系により多くの性質が決定されると期待される。特に、変数係数のシュレディンガー方程式の解の特異性は、この力学系を運動する古典粒子の高エネルギーでの挙動と密接な関係があると考えられる。このアイデアを用いて解の超局所的特異性の特徴付けを行い、さらにその拡張、応用を目指した。特に、散乱理論との関係、多様体への一般化などが興味の焦点となる。

(2)シュレディンガー方程式の解の平滑化作用、特に消散型評価、Strichartz 評価をポテンシャルのある場合、変数係数の場合、多様体上のシュレディンガー作用素などに拡張することは、それ自身も興味深く、応用上も重要である。これらに関する研究を、散乱理論の手法や(1)の成果とも絡めながら、進めていく。

３．研究の方法

(1)シュレディンガー方程式に対応する古典力学粒子の高エネルギーでの挙動は、時間とエネルギーに関するスケーリングにより、ポテンシャルや磁場を除いた、リーマン計量を持つ空間の中を運動する粒子の長時間の運動で近似できる事が分かる。非束縛的条件と、摂動の遠方での適当な減衰条件の下では、長時間の粒子の運動は古典力学的な散乱理論を用いて記述できる。このアイデアと、半古典解析の枠組みでのエゴロフの定理、あるいはハイゼンベルグ方程式の解の構成の議論を組み合わせる、というのが、この計画でのシュレディンガー方程式の解の超局所的特異性の特徴付けに関する基本的なアイデアである。

この基本的な手法を元にして、長距離型摂動への拡張には、ハミルトン・ヤコビ方程式の解を用いた modifier の構成、散乱多様体上のシュレディンガー方程式を考える場合は、動系方向の運動のみに注目した(新しい)古典力学的散乱理論の構成、解析的特異性の解析においては、Sjöstrand の解析的超局所解析、等を組み合わせる。

(2)平滑化作用の解析においては、以下のふたつの手法を用いる。
①上記のアイデアの変形として、特異性伝播定理で用いられる正値交換子(positive commutator)の手法を半古典解析に拡張したものを用いる手法。
②散乱作用素の L^p 空間での有界性を証明し、その系として消散型評価などを導く手法(谷島)。

４．研究成果

(1) 論文⑤において、上記の基本的な手法を用いたシュレディンガー方程式の解の超局所的特異性の特徴付けが、ユークリッド空間上の短距離型摂動の場合に証明された。論文⑥においては、その成果を、ユークリッド空間の上の長距離型摂動の場合に拡張した。ここでの主要な新規性は、高エネルギーでのハミルトン・ヤコビ方程式の解を構成し、(変形子)modifier を用いて長距離型散乱理論を構成したことにある。論文⑨においては、散乱多様体と呼ばれる、漸近的に錐状の多様体における短距離型摂動を持つシュレディンガー作用素の場合に、上記の結果を拡張した。この論文における主な新規性は、散乱多様体での古典力学的散乱理論の構成、対応する 2 空間散乱理論の枠組みの下での量子力学的時間発展の記述、などである。論文⑧、⑮においては、上記の手法を摂動を加えた調和振動子に適用し、調和振動子の周期的な超局所的特異性の回帰に関する特徴付けを行った。論文④、⑩においては、このアイデアをさらに推し進めて、Sjöstrand 理論の枠組みを用いて、解析的シュレディンガー方程式の解の解析的な超局所特異性の特徴付けを(ユークリッド空間上の短距離摂動の場合に)行った。

(2) 論文①においては、ユークリッド空間上の長距離型摂動を持つシュレディンガー方程式の解の超局所平滑化作用を、「等質波面集合」(homogeneous wave front set)の概念を導入して証明した。これは、論文⑥において精密化されたとも言えるが、全く異なった手法による結果である。論文⑯においては、この結果が散乱多様体の場合に拡張され、等質波面集合が Wunsch によって導入された「二次散乱波面集合」と同値であることも証明された。論文②においては、この手法を(Martinez -中村の)相空間における指数的重み付き評価の手法と組み合わせて、解析的超局所平滑化作用に一般化された。

論文⑪、⑫、⑬ ⑭においては、短距離型のポテンシャルを持つシュレディンガー方程式について、波動作用素の L^p 空間における有界性を証明することにより、消散型の平滑化作用を証明した。論文⑪は、０エネルギーに於いて共鳴状態がある場合にも成り立つ評価を証明し、論文⑫では奇数次元の場合、論文⑬では偶数次元の場合、論文⑭では４次元空間の場合に、に、さらに精密な評価を得た。

(３)上記の研究に関連して、ランダム・シュレディンガー作用素のスペクトルに関する

研究も行い、以下の研究成果を得た。論文③では、スペクトル・シフト関数の L^p 空間での精密な評価を用いて、ランダム・シュレディンガー作用素のウェグナー評価についての新たな結果を得た。論文⑦では、局所ポテンシャルが定符号でない場合に、スペクトル下端におけるリフシッツ特異性を証明し、その系としてアンダーソン局在を導いた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１６件）

①Nakamura, S.: Propagation of the homogeneous wave front set for Schrödinger equations. Duke Math. J. **126**, 349-367 (2005) (査読有)

② Martinez, A., Nakamura, S., Sordoni, V.: Analytic Smoothing Effect for the Schrödinger Equation with Long-Range Perturbation, Comm. Pure Appl. Math. **59** 1330-1351 (2006) (査読有)

③ Hundertmark, D., Killip, R., Nakamura, S., Stollmann, P., and Veselić, I.: Bounds on the spectral shift function and the density of states. Commun. Math. Phys. **262**, 489-503 (2006) (査読有)

④ Martinez, A., Nakamura, S., Sordoni, V.: Analytic singularities for long range Schrödinger equations. Comptes Rendus Mathematique **346**, 15-16 (2008), 849-852. (査読有)

⑤ Nakamura, S.: Wave front set for solutions to Schrödinger equations. J. Functional Analysis **256**, 1299-1309 (2009). (査読有)

⑥ Nakamura, S.: Semiclassical singularity propagation property for Schrödinger equations. J. Math. Soc. Japan **61**, 177-211 (2009). (査読有)

⑦ Klopp, F., Nakamura, S.: Spectral extrema and Lifshitz tails for non monotonous alloy type models. Commun. Math. Phys. **287**, 1133-1143 (2009). (査読有)

⑧ Mao, S., Nakamura, S.: Wave front set for solutions to perturbed harmonic oscillators. Comm. Partial Differential Equations **34**, 506-519 (2009). (査読有)

⑨ Ito, K., Nakamura, S.: Singularities of solutions to Schrödinger equation on scattering manifold. American J. Math. (査読有。印刷中)

⑩ Martinez, A., Nakamura, S., Sordoni, V.: Analytic wave front for solutions to Schrödinger equation, Advances in Math.(査読有。印刷中)

⑪ Yajima, K.: Dispersive estimates for Schrödinger equations with threshold resonance and eigenvalue. Comm. Math. Phys. **259** (2005), 475-509. (査読有)

⑫ Yajima, K.: The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. I. The odd dimensional case. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), 43-93. (査読有)

⑬ Finco, D., Yajima, K.: The L^p boundedness of wave operators for Schrödinger operators with threshold singularities. II. Even dimensional case. J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006), 277-346. (査読有)

⑭ Jensen, A., Yajima, K.: On L^p boundedness of wave operators for 4-dimensional Schrödinger operators with threshold singularities. Proc. Lond. Math. Soc. **96** (2008), 136-162. (査読有)

⑮ Doi, S.: Smoothness of solutions for Schrödinger equations with unbounded potentials. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), 175-221. (査読有)

⑯ Ito, K.: Propagation of singularities for Schrödinger equations on the Euclidean space with a scattering metric. Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 1735-1777. (査読有)

〔学会発表〕（計１０件）

① 中村周 : Semiclassical singularity propagation property for Schrödinger equation with long-range perturbation, BIRS Workshop: *Schrödinger Evolution Equations*, Banff, Canada. April 23, 2006.

②中村周 : Singularity of solutions to Schrödinger equation with variable coefficients, PASI (Pan-American Advanced Studies Institute), Santiago, Chile, July 31, 2006.

③中村周：Singularity of solutions to Schrödinger equations (1) Seminar at Dept. Math., The Australian National University, Canberra, Australia, Oct. 30, 2006;
(2) International Conference: *Spectral Theory of Random Operators and Related Fields in Probability Theory*, Kyoto Univ., Dec. 11, 2006.

④ 中村周：「シュレディンガー方程式の解の特異性とその周辺」日本数学会年会・企画特別講演，2007年3月30日，埼玉大学

⑤ 中村周：Topics on scattering theory for Schrödinger operators. Seminar at Univ. Paris 13, May 29, 2007.

⑥ 中村周：Singularity of solutions to Schrödinger equation on scattering manifold. (1) Seminar at Univ. Bologna, June 4, 2007;
(2) Mathematical Physics Seminar at Inst. H. Poincaré, Paris, June 11, 2007.
(3) Seminar at Euler Institute, St. Petersburg, July 31, 2007.

⑦ 中村周：Remarks on scattering on scattering manifold. 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」，京都大学・数理解析研究所
2008年1月16日.

⑧ 中村周：Lifshitz tails for non monotonous alloy type model. Oberwolfach Workshop: Disordered Systems: *Random Schrödinger Operators and Random Matrices*, Oberwolfach, Germany, March 28, 2008.

⑨ 中村周：Propagation of singularities for Schrödinger operators. *Second Symposium on Scattering and Spectral Theory*, Serrambi, Brazil, August 21, 2008.

⑩ 中村周：Time-dependent scattering theory for Schrödinger operators on scattering manifolds. BIRS Workshop: *Mathematical Theory of Resonances*. Banff, Canada, October 23, 2008.

〔図書〕（計０件）

（なし）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

（なし）

○取得状況（計０件）

なし

〔その他〕

（なし）

６．研究組織
(1)研究代表者
中村　周 (NAKAMURA SHU)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：50083520

(2)研究分担者
谷島　賢二 (YAJIMA KENJI)
学習院大学・理学部・教授
研究者番号：80011758

土居　伸一 (DOI SHIN-ICHI)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00243006

(3)連携研究者
André Martinez
ボローニャ大学・数学科・教授
研究者番号：N/A

Vania Sordoni
ボローニャ大学・数学科・助教授
研究者番号：N/A

伊藤健一 (ITO KENICHI)
筑波大学・数理物質科学研究科・助教
研究者番号：90512509