

平成 21 年 4 月 14 日現在

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340034

研究課題名 (和文) 熱核とグリーン関数の漸近解析とその応用

研究課題名 (英文) Asymptotic analysis of heat kernels and Green functions and its applications

研究代表者

村田 實 (MURATA MINORU)

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：50087079

研究成果の概要：

放物型偏微分方程式に対する初期値・境界値問題の非負値解の一意性定理を応用して、歪積型楕円型方程式のマルチン境界を決定する方法を与えた。また、リーマン多様体上の筒状領域での2階放物型偏微分方程式の非負値解の構造を精力的に研究し、熱核に対する一般的な仮定 IU [intrinsic ultracontractivity] の下で任意の非負値解の具体的な積分表示を与えた。さらに IU から [定数関数 1 が随伴楕円型作用素の小摂動である] ことが従うことも示した。一方、土田哲生とともに周期係数楕円型作用素を研究し、グリーン関数の漸近形を与えるとともに極限吸収原理を示した。

交付額

(金額単位：円)

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2005年度 | 1,400,000 | 0       | 1,400,000 |
| 2006年度 | 1,600,000 | 0       | 1,600,000 |
| 2007年度 | 1,400,000 | 420,000 | 1,820,000 |
| 2008年度 | 1,600,000 | 480,000 | 2,080,000 |
| 年度     |           |         |           |
| 総計     | 6,000,000 | 900,000 | 6,900,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：解析学、関数方程式論、解析・評価、関数解析学、確率論

## 1. 研究開始当初の背景

2階楕円型・放物型偏微分方程式は数学の各分野にまたがる重要な研究対象であり、その熱核とグリーン関数の最適な一様評価や無限遠での漸近的性質を幾何的・解析的に解明するのは興味深い問題である。

今日まで様々な角度からこの問題は多面的に研究され、特に過去20年間のこの問題に関連する成果には著しいものがある。研究代表者(村田實)は量子力学に関連する

Schroedinger 半群の長時間漸近形を決定し、これを契機として非相対コンパクト領域上の2階線形楕円型偏微分方程式の正值解全体の構造と放物型偏微分方程式に対する初期値問題の非負値解の一意性の必要十分条件を研究し一つの流れを形成した。この研究の中で得られた幾つかの成果は熱核とグリーン関数の無限遠での漸近形を決定することにより得られたものである。一方、調和解析では J. P. Anker, L. Ji, Y. Guivarch 等

によりノンコンパクトリーマン対称空間上の熱核とグリーン関数の精緻な一様評価が与えられ、対称空間の Martin コンパクト化や Satake コンパクト化が決定された。

リーマン多様体上の放物型方程式に対する初期値問題の非負値解の一意性が破れる場合には多様体と方程式は無限遠において非一様な構造を持つが、非一様な構造を持つ放物型方程式の熱核の最適な一様評価や非負値解全体の構造については、その重要性にもかかわらずわずかの結果しか知られていない。また熱核とグリーン関数の無限遠での漸近形や漸近展開については、空間変数の無限遠点近傍で一様な構造を持つ方程式でさえ十分な解析がなされていないのが現状であった。

また代表者は、放物型方程式に対する初期値問題の非負値解の非一意性と歪積型の楕円型方程式の正值解全体の構造を研究する中で、放物型方程式に対する初期値問題の非負値解の一意性が破れる場合に非負値解全体の構造を決定するための着想を得てその一部を既に研究集会で発表していた。

これ等が本研究課題を総合的に研究する必然性の背景であった。

## 2. 研究の目的

本研究は Riemann 多様体内の非相対コンパクト領域上の 2 階線形放物型・楕円型偏微分方程式に付随する熱核・グリーン関数の最適な一様評価および無限遠での漸近形をその多様体の幾何学的特性・領域の形および方程式の無限遠での漸近的性質から具体的に求め、それを応用して放物型・楕円型偏微分方程式の非負値解全体の構造を具体的に決定することを目的として遂行した。

より具体的には主に次の二つの研究を遂行した：(い) 放物型方程式に対する初期・境界値問題の非負値解の一意性が破れる場合に、熱核の最適な一様評価を求めて筒状領域上の放物型方程式の(初期条件・境界条件を課さない)非負値解全体の構造を決定する；(ろ) (次は対応する放物型方程式に対する初期・境界値問題の非負値解の一意性が成立する典型的な場合であるが) ユークリッド空間上の周期係数楕円型偏微分作用素やリーマン対称空間上のラプラス作用素のように一様な構造を持つ作用素およびその摂動に対応する熱核とグリーン関数の無限遠での漸近形を決定する。

## 3. 研究の方法

種々の正值性によって支配される 2 階線形放物型・楕円型偏微分方程式は数学の各分野にまたがる重要な研究対象であり、その熱核

とグリーン関数の一様評価や無限遠での漸近的性質の研究に関連する研究者は国内外に存在している。従ってこの研究を押し進めるためには相互の研究交流特に国外研究者との交流を活発に行うことが重要である。具体的には、国外の専門家を訪ねて review を受けるとともに彼らを日本に招いて最新の成果を吸収し(例えば、イスラエル Israel Institute of Technology の Y. Pinchover を招待)、自・他大学の研究者(優秀な大学院生を含む)と研究集会・セミナー・e-mail・プレプリントの交換等を通じて研究連絡を密に行うとともに研究成果の討論と情報交換を行う。

役割分担については全体の調整・連絡等は代表者が行い、分担者・代表者は下記の研究に当たる。

(a) 微分方程式論的・ポテンシャル論的・実解析的方法による 2 階線形放物型・楕円型偏微分方程式の熱核とグリーン関数の最適な一様評価と無限遠での漸近形およびその解の構造解明への応用の研究(代表者、石毛和弘、相川弘明、志賀啓成)

(b) 確率論的・ポテンシャル論的方法による 2 階線形放物型・楕円型偏微分方程式の熱核とグリーン関数の最適な一様評価と無限遠での漸近形およびその解の構造解明への応用の研究(代表者、富崎松代、内山耕平、相川弘明)

(c) Riemann 多様体上の熱核とグリーン関数の漸近解析と幾何構造の総合的研究(代表者、志賀啓成)

## 4. 研究成果

村田實は放物型偏微分方程式に対する初期値・境界値問題の非負値解の一意性定理を応用して、歪積型楕円型方程式のマルチン境界を決定する方法を与えた。また、リーマン多様体上の筒状領域での 2 階放物型偏微分方程式の非負値解の構造を精力的に研究し、熱核に対する一般的な仮定「intrinsic ultracontractivity」の下で任意の非負値解の具体的な積分表示を与えた。放物型方程式の非負値解の積分表示については、この結果が 2007 年に *J. Functional Analysis* に発表される以前には抽象論と極僅かの例のみが知られていたが、この結果は一般的な仮定の下で具体的な積分表示を与えた最初のものであり、今後の研究の礎となる結果である。また intrinsic ultracontractivity から[定数関数 1 が随伴楕円型作用素の小摂動である]ことが従うことも示した。さらに P. J. Mendez とともに研究を進めて、一般的ではほぼ最適な仮定[定数関数 1 が随伴楕円型作用素の半小摂動である]の下で任意の非負値解の具体的な積分表示を与えた。(その成果は論文とし

て投稿中。) この結果は一般の仮定の下で非負値解の具体的な積分表示を与える定理として決定的なものである。また半小摂動性から熱核の評価  $\text{semi-intrinsic ultracontractivity}$  が従うことも示した。一方、土田哲生とともに周期係数楕円型作用素を研究し、グリーン関数の漸近形を与えると同時に極限吸収原理を示した。

内山耕平は古典的なランダムウォークを含む広いクラスである加法的マルコフ過程について Green 関数と遷移確率の漸近公式を導いた。この公式に基づいて周期グラフ上のランダムウォークの Green 関数と遷移確率の漸近評価を具体的に与えた。また正方格子上のランダムウォークを到達点について条件付けたときに、訪問点の平均個数の漸近評価を与えた。

志賀啓成は複素力学系に関して、有理関数の Julia 集合が非連結な場合にその解析的性質および Fatou 集合の Martin compact 化などを考察した。Riemann 面論では、単位円板からそれ自身への正則写像についての Denjoy-Wolff の定理を Riemann 面の正則写像へ拡張した。Klein 群の単連結連結成分のリーマン写像を精力的に研究し、その連続度研究の観点から正則関数の連続度に関する Hardy-Littlewood の定理を拡張した。また、Holomorphic motion の拡張問題について新しい知見を得た。

相川弘明は  $\mathbb{C}^{\{1,1\}}$ -領域と内部および外部球条件を満たすことが同値であることを示し、Green 関数の比較を用いて  $\mathbb{C}^{\{1,1\}}$ -領域における境界 Harnack 原理を証明した。任意の領域において大域的な境界 Harnack 原理が成立することと、大域的な Carleson 評価が成立することが同値であることを示した。John 領域において調和測度が強ダブルリングであることと、領域が準一様であることが同値であることを示した。

富崎松代は状態区間の端点への到達時刻に関して条件付けられた一次元広義拡散過程に対して推移確率密度の時刻無限大での漸近分布について調べた。また、そのような条件付き分布は、必ずしもマルコフ過程を導かないことを示した。更に、開区間上で定義された一次元広義拡散作用素に対して小摂動性の概念を考察し、それが、対応する広義拡散過程の境界の状態により特徴付けられることを示した。スピード測度に関する推移確率密度関数の内在的超縮小性についても考察し、尺度、スピード測度による十分条件を求めた。

石毛和弘はポテンシャル項付き熱方程式の解の最大点挙動について、その正值調和関数の無限遠点での挙動を用いて詳しく解析を行った。また、これらの研究の応用発展として解の時間無限大での微分減衰の速さや

爆発問題における藤田指数の決定問題などと正值調和関数の無限遠点での挙動との関係についても研究を行った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① 村田實, Integral representations of nonnegative solutions for parabolic equations and elliptic Martin boundaries, *J. Functional Anal.*, 245, 177-212, 2007. 査読有
- ② 村田實, 土田哲生, Asymptotics of Green functions and the limiting absorption principle for elliptic operators with periodic coefficients, *J. Math. Kyoto Univ.*, 46, 713-754, 2006. 査読有
- ③ 村田實, Representations of nonnegative solutions for parabolic equations, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 44, 283-289, 2006. 査読有
- ④ 村田實, Uniqueness theorems for parabolic equations and Martin boundaries for elliptic equations in skew product form, *J. Math. Soc. Japan*, 57, 1-27, 2005. 査読有
- ⑤ 内山耕平, Asymptotic estimates of the Green functions and transition probabilities for Markov additive processes, *Electric Journal of Probability*, 12, 138-180, 2007. 査読有
- ⑥ 志賀啓成, On the hyperbolic length and quasiconformal mappings. *Complex Variables*, 50, 123-130, 2005. 査読有
- ⑦ 相川弘明, Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate, *Math. Scand.*, 103, 61-76, 2008. 査読有
- ⑧ 相川弘明, 平田賢太郎, Doubling conditions for harmonic measure in John domains, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58, 429-445, 2008. 査読有
- ⑨ 富崎松代, Intrinsic ultracontractivity and small perturbation for one dimensional generalized diffusion operators, *Journal of Functional Analysis*, 251, 289-32, 2007. 査読有
- ⑩ 石毛和弘, Gradient estimates for the heat equation in the exterior domains under the Neumann boundary condition, *Differential Integral Equations*, 22, 401-410, 2009. 査読有

[学会発表] (計 10 件)

- ① 村田實, Structure of nonnegative solutions for parabolic equations and perturbation theory for elliptic operators, 研究集会「Potential Theory and Related Fields」, 2009年2月17日, 京都大学数理解析研究所
- ② 村田實, Integral representations of nonnegative solutions for parabolic equations and elliptic Martin boundaries, 研究集会「Recent Topics of Differential Equations」, 2006年10月21日, 群馬大学東京オフィス
- ③ 志賀啓成, フラクタルな境界を持つ領域の等角写像について, 研究集会「確率論とPDE」, 2007年10月15日, 広島大学学生会館
- ④ 志賀啓成, Conformal mappings of invariant components of Kleinian groups, The international conference of complex analysis and potential theory, 2006年9月11日, Gebze Institute of Technology
- ⑤ 相川弘明, 複雑領域上の正調和関数, 日本数学会(企画特別講演), 2009年3月29日, 東京大学
- ⑥ 相川弘明, Martin 境界, 境界 Harnack 原理と擬双曲距離. 第55回幾何学論シンポジウム, 2008年8月25日, 弘前大学
- ⑦ 相川弘明, Boundary estimates of  $p$ -harmonic functions in a metric measure space, 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」, 2005年7月15日, 京都大学数理解析研究所
- ⑧ 富崎松代, Characterization of small perturbation of one-dimensional diffusion operators, 研究集会「Recent Topics of Differential Equations」, 2006年10月21日, 群馬大学東京オフィス
- ⑨ 石毛和弘, The decay of the solutions for the heat equation with a potential, Workshop on Viscosity Solutions and Related Topics, 2009年1月30日, サピアタワー・埼玉大サテライトキャンパス
- ⑩ 石毛和弘, Blow-up set for a semilinear heat equation with large diffusion in  $\mathbb{R}^N$ , Second Euro-Japanese Workshop on Blow Up, 2006年9月8日, Madrid

[図書] (計 2 件)

- ① 村田實、倉田和浩、岩波書店、楕円型・放物型偏微分方程式、2006年、

1-258.

- ② 相川弘明、岩波書店、複雑領域上のディリクレ問題-ポテンシャル論の観点から 2008年、302頁.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

村田 實 (MURATA MINORU)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 50087079

### (2) 研究分担者

志賀 啓成 (SHIGA HIROSHIGE)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 10154189

内山 耕平 (UCHIYAMA KOHEI)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 00117566

相川 弘明 (AIKAWA HIROAKI)  
北海道大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 20137889

富崎 松代 (TOMISAKI MATSUYO)  
奈良女子大学・理学部・教授  
研究者番号: 50093977

石毛 和弘 (ISIGE KAZUHIRO)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 90272020

### (3) 連携研究者

該当なし