

平成 21 年 5 月 27 日現在

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2005～2008

課題番号：17340036

研究課題名（和文）無限次元空間における確率解析

研究課題名（英文）Stochastic analysis in infinite dimensional spaces

研究代表者

重川 一郎（SHIGEKAWA ICHIRO）

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00127234

研究成果の概要：確率解析に関する研究を、主に関数解析的な手法で進めた。ここでは次のような結果を得た。① Hodge-Kodaira 作用素の multiplier の L^p 有界性 ② Riemann 多様体上の Schrödinger 作用素に対する Littlewood-Paley の不等式 ③ 作用素の交換関係と生成作用素 ④ Wiener 空間及び格子スピン系の Schrödinger 作用素のスペクトルギャップの存在 ⑤ 1次元拡散過程の生き残り拡散過程の存在 ⑥ 非対称な半群に関する超縮小性のための条件と、リーマン多様体上の拡散過程への応用。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	2,800,000	0	2,800,000
2006年度	2,600,000	0	2,600,000
2007年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2008年度	2,300,000	690,000	2,990,000
年度			
総計	10,000,000	1,380,000	11,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：Wiener 空間、Brown 運動、拡散過程、対数 Sobolev 不等式、
スペクトルギャップ、格子スピン系、Hodge-Kodaira 作用素

1. 研究開始当初の背景

(1) これまでの研究は、Malliavin 解析の研究が基礎をなしており、一つの方向は有限次元の確率微分方程式に対して、従来の Malliavin 解析の方法を深化させることであったが、新たな方向性として無限次元解析として発展に展望が開けてきた。

(2) Malliavin 解析では Dirichlet 形式の理論が重要な働きをしてきた。そうした関数解析的な方法との融合を進める必要が出てきた。また Dirichlet 形式は、数理物理的な問題意識からのドイツの研究者による貢献も大きかったが、それらとの連携も深める

必要が出てきた。

2. 研究の目的

主な研究対象は無限次元空間における確率過程である。無限次元空間は、確率論においては Brown 運動を実現する Wiener 空間を典型として自然な形で現れ、しかも測度を持った空間として実現されている。さらに、場の量子論、統計物理における無限粒子系、多様体の上の道の空間など、無限次元の空間は数学ばかりでなく、微分構造が与えられているという状況で、解析を展開するのが主な目的である。具体的には次の事項の解明を目指す。

- ① 前提になる測度の構成と、微分構造の解明 (例: Gibbs 測度、H-微分)
- ② 微分構造に基づく微積分の枠組みの整備 (例: Malliavin 解析、Sobolev 空間)
- ③ 無限次元空間に実現される確率過程の解明 (例: 漸近挙動、不変測度の存在)
- ④ 対応する作用素のスペクトル構造の解明 (例: スペクトルの跳び)
- ⑤ 無限次元空間の多様体としての幾何的な構造の解明 (例: Hodge-Kodaira 作用素)

3. 研究の方法

(1) 無限次元の典型例として Wiener 空間の上で各種の作用素を調べることは、それ自体の興味とともに、他の場合への足がかりとして重要である。特に Wiener 空間は Malliavin 解析の発展により Sobolev 空間などの解析的な枠組みが整備されている。この成果を発展させることは当然求められるべきことであり、ここでは次のような方針で問題を考察する。 L を Ornstein-Uhlenbeck 作用素、 V をスカラー・ポテンシャルとして $L-V$ の形の Schrödinger 作用素について、 L^2 の枠組みで作用素の定義域を確定し、スペクトルの性質を調べ、さらに L^p の枠組みに拡張するを目指す。さらに Littlewood-Paley の不等式を示すこと、などが次の目標となる。Dirichlet 形式は L^2 理論なので、 L^p 理論に関しては、新たな理論の枠組みの整理も必要になってくる。 L^p 理論を関数解析的に展開するためには直接に生成作用素を取り扱う必要がある。さらに Wiener 測度を Wiener 測度に関し絶対連続な測度に変え、生成作用素の本質的自己共役性、定義域の確定、スペクトルの跳びの存在、などについて考察する。

(2) 毎年開催している「確率解析とその周辺」の研究会を開催し、国内の研究者の間での交流の場を持つとともに、最新の成果の発表を行う。また海外からの研究者も招聘する。

2005年に Z. Qian、2006年に R. Leandre、2008年に A. Lejay を招いた。

(3) 日独での研究交流を進めるために、2国間での研究集会を2005年から2008年にかけて、4回交互に開催した。

4. 研究成果

主要なもののみ述べる。

(1) 重川一郎の研究成果

確率解析に関する研究を、主に関数解析的な手法で進めた。ここでは次のような問題を取り扱った。

- ① Hodge-Kodaira 作用素の multiplier の L^p 有界性
- ② Riemann 多様体上の Schrödinger 作用素に対する Littlewood-Paley の不等式。

- ③ 作用素の交換関係と生成作用素
- ④ Wiener 空間及び格子スピン系の Schrödinger 作用素のスペクトルギャップの問題。
- ⑤ 1次元拡散過程の生き残り拡散過程の存在
- ⑥ 非対称な半群に関する超縮小性のための条件と、リーマン多様体上の拡散過程への応用。

問題意識としては無限次元の確率解析なので、無限次元空間を主な対象とするが、幾何学的な構造にも着目しながら研究を行ったので、有限次元の多様体上の解析も並行して行った。多様体上の作用素として微分形式に作用する Hodge-Kodaira 作用素が重要である。Multiplier はこの作用素の関数として表される作用素であるが、有限次元多様体の場合に L^p の枠組みで有界性を論じ、曲率による十分条件を与えた。基本的には方法として Littlewood-Paley の G -関数を用いたが、作用する関数がベクトル値であるために、ベクトル値の平方場作用素や、作用素の交換関係をうまく利用する必要があった。また Littlewood-Paley の不等式を L^p の枠組でも論じた。特にここで扱ったのは Schrödinger

型の作用素で、ベクトル値関数に対して行列的に作用する場合も扱ったところが新しい点である。関連して、作用素の交換関係が重要であるとの認識を持ったので、一般論を準備して、半群や、生成作用素との関係を論じた。単純に交換する場合だけでなく、余分な項が残る場合にも処理できることを示した。この方法を用いると生成作用素の定義域を明示的に述べることが出来ることが副産物として得られた。

また無限次元的な問題として、Wiener 空間上の Schrödinger 作用素を考察し、ポテンシャルの可積分性の条件でスペクトルギャップの存在を示した。有限次元で近似して証明したが、Green 作用素のノルム収束を示すことが鍵となる。そのために対数 Sobolev 不等式を有効に用いた。また格子スピン系に対して、Hodge-Kodaira 作用素に対し、高次元の調和形式が存在しないことを示した。

格子スピン系はポテンシャルとして

$$\Phi(x) = \sum_{i \sim j} J(x_i - x_j)^2 + \sum_i U(x_i)$$

を考え、形式的な Gibbs 測度

$$Z^{-1} e^{-\Phi(x)} dx$$

を与えたものを考える。 U が一様に凸の場合には容易にスペクトルギャップの存在が示せるが、 U に有界な摂動を加えても、摂動が小さいときはやはりスペクトルギャップが存在し、高次の微分形式に作用する Hodge-Kodaira 作用素に対して、調和形式が存在しないことを示した。これとは別に、一般に非対称な枠組みで半群が超縮小性を

持つための必要十分条件を求めた。扇形条件を満たす Dirichlet 形式から定まる半群の場合と、双対半群もマルコフ性をもつマルコフ半群の場合を取り扱うことが出来た。応用としてコンパクトなリーマン多様体上の非対称拡散過程の基本解の指数収束性のオーダーを調べた。拡散過程は一様楕円性が満たされる範囲で考察した。結果として不変測度が同じ場合は対称な場合が最も収束が遅いことが分かった。現在の段階では不等式のみが示しているが、実際に収束の速い非対称なものが存在するかは将来の問題として残っている。正規作用素の範囲では、対称な場合と収束の速度は同じことが示せるので、それ以外の場合を考察する必要がある。

(2) 熊谷隆の研究成果

ランダムな図形上のランダムウォークの漸近挙動を調べることにより、その上の熱伝導の仕方を解析した。具体的には、正則な樹木上のパーコレーション、分枝過程、6次元より大きい次元の散開方向付きパーコレーションについて、臨界確率における(長さが無限になるように条件付けた)パーコレーションクラスター上のランダムウォークが(媒質について確率1のレベルで)劣拡散的であることを示し、そのスペクトル次元を求めた。

また、一般にランダムなグラフが与えられたとき、その上の熱核評価を得るための十分条件を、体積と有効抵抗に関する条件で与えた。

(3) 吉田伸生の研究成果

本研究は、時間と場所に依存する偶然性を伴う環境下で空間に分布した量(例えば、人口の分布)の確率的時間変動を対象とし、その長時間後の分布状況を理論的に予測することを目標とする。環境が時間と場所に依存する偶然性を持つという設定により、一定環境下で論じられてきた従来の確率論的人口モデルに比べより現実問題に即した理論が構築できる。

(4) 会田茂樹の研究成果

無限次元空間上のシュレーディンガー作用素の最小固有値の準古典極限の研究, Wiener 空間内のある非凸領域上のポアンカレの補題の研究を行った。後者について、具体的には、リーマン多様体上のパス空間上の作用素、構成的場の量子論に現れる有限体積の空間の $P(\phi)_2$ -ハルトニアン準古典極限について研究を行った。現在、この結果を空間的にカットオフされたいわゆる spatially cut-

off $P(\phi)_2$ -ハルトニアンに拡張した論文を準備中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 19 件)

[1] Chen, Z-Q., Kim, P. and Kumagai, T., (査読有) Weighted Poincaré inequality and heat kernel estimates for finite range jump processes, *Math. Ann.*, **342** (2008), no. 4, 833-883.

[2] Chen, Z-Q. and Kumagai, T., (査読有) Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces, *Probab. Theory Related Fields*, **140** (2008), no. 1-2, 277-317.

[3] Aida, S., (査読有) Log-Sobolev inequalities with potential functions on pinned path groups, *Commun. Stoch. Anal.*, **2** (2008), no. 1, 33-51.

[4] Yoshida, N., (査読有) Central limit theorem for branching random walks in random environment, *Ann. Appl. Probab.*, **18** (2008), no. 4, 1619-1635.

[5] Yoshida, N., (査読有) Phase Transitions for the Growth Rate of Linear Stochastic Evolutions, *J. Stat. Phys.*, **133** (2008) No.6, 1033-1058.

[6] Uemura, H., (査読有) Generalized positive continuous additive functionals of multidimensional Brownian motion and their associated Revuz measures, *Stochastic Process. Appl.*, **118** (2008), no. 10, 1870-1891.

[7] Ueki, N., (査読有) Wegner estimate and localization for random magnetic fields, *Osaka J. Math.*, **45** (2008), no. 3, 565-608.

[8] Shigekawa, I., (査読有) Schrödinger operators on the Wiener space, *Commun. Stoch. Anal.*, **1**(2007), no. 1, 1-17.

[9] Aida, S., (査読有) Semi-classical limit of the bottom of spectrum of a Schrödinger operator on a path space over a compact Riemannian manifold, *J. Funct. Anal.*, **251** (2007), no. 1, 59-121.

[10] Uemura, H., (査読有) Positive continuous additive functionals of multidimensional Brownian motion and the Brownian local time, *J. Math. Kyoto Univ.*, **47** (2007), no. 2, 371--390.

[11] Sugita, H. and Takanobu, S., (査読有) The probability of two F_q -polynomials to be coprime, Probability and number theory--Kanazawa 2005, 455-478, Adv. Stud. Pure Math., 49, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007.

[12] Shigekawa, I., (査読有) Defective intertwining property and generator domain, *J. Funct. Anal.*, **239** (2006), no. 2, 357-374.

[13] Miyokawa, T and Shigekawa, I., (査読有) On equivalence of L^p -norms related to Schrödinger type operators on Riemannian manifolds, *Probab. Theory Related Fields*, **135** (2006), no. 4, 487-519.

[14] Hino, M. and Kumagai, T., (査読有) A trace theorem for Dirichlet forms on fractals, *J. Funct. Anal.*, **238** (2006), no. 2, 578-611.

[15] Shigekawa, I., (査読有) L^p multiplier theorem for the Hodge-Kodaira operator, Séminaire de Probabilités XXXVIII, 226-246, Lecture Notes in Math., **1857**, Springer, Berlin, 2005.

[16] Barlow, M. T., Coulhon, T. and Kumagai, T., (査読有) Characterization of sub-Gaussian heat kernel estimates on strongly recurrent graphs, *Comm. Pure Appl. Math.*, **58** (2005), no. 12, 1642-1677.

[17] Kumagai, T. and Sturm, K-T., (査読有) Construction of diffusion processes on fractals, d -sets, and general metric measure spaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, **45** (2005), no. 2, 307-327.

[18] Hino, M., (査読有) On singularity of energy measures on self-similar sets, *Probab. Theory Related Fields*, **132** (2005), no. 2, 265-290.

[19] Ariyoshi, T. and Hino, M., (査読有) Small-time asymptotic estimates in local Dirichlet spaces, *Electron. J. Probab.*, **10** (2005), no. 37, 1236-1259.

[学会発表] (計 11 件)

[1] 重川 一郎, Non-symmetric diffusions on Riemannian manifolds and the ultracontractivity, 科研費シンポジウム「確率解析とその周辺」2008年11月20日(木) (於: 名古屋大学ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー, ベンチャーホール)

[2] Shigekawa, I., Ultracontractivity for non-symmetric Markovian semigroup, German-Japanese Symposium on Stochastic Analysis and Applications 2008, 2008年9月12日(金) (於: 九州大学西新プラザ)

[3] Kumagai, T., Uniqueness of Brownian motion on Sierpinski carpets, Stochastic Analysis and Applications 2008, 2008年9月11日、(於: 九州大学西新プラザ)

[4] Aida, S., Semi-classical limit of $P(\phi)_2$ -Hamiltonians, German-Japanese Symposium on Stochastic Analysis and Applications 2008, 2008年9月10日(水) (於: 九州大学西新プラザ)

[5] Hino, M., Energy measures and derivatives on some fractals, German-Japanese Symposium on Stochastic Analysis and Applications 2008, 2008年9月9日(火) (於: 九州大学西新プラザ)

[6] Shigekawa, I., Non symmetric diffusions on a Riemannian manifold, The 1st MSJ-SI, Probabilistic Approach to Geometry, 2008年8月8日(金) (於: 京都大学時計台百周年記念ホール)

[7] Shigekawa, I., Semigroups that preserve a convex set in a Banach space, The 6th Workshop on Markov processes and related topics, 2008年7月21日 (於: Anhui Normal University, Wuhu, CHINA)

[8] Kumagai, T., Heat kernel estimates for recurrent random walk on random media, Random systems from physics to biology, 2008年3月 (於: Technical University of Berlin)

[9] Shigekawa, I., The dual ultracontractivity and its applications, Dirichlet Forms, Stochastic Analysis and Interacting Systems, 2007年9月21日(金) (於: Technical University of Berlin, Berlin, GERMANY)

[10] 熊谷 隆, Heat kernel estimates and Harnack inequalities for jump processes, 確率論シンポジウム, 2006年12月 (於: 九州大学西新プラザ)

[11] Kumagai, T., Random walk on the incipient infinite cluster for oriented percolation in high dimensions. AMS Sectional Meeting, 2006年10月28日 (於: Connecticut 大学, 米国)

[12] Shigekawa, I., One dimensional diffusions conditioned to be non-explosive, Mini Symposium 24 "Probability and Geometry," Jahrestagung der Deutsche Mathematiker-Verinigung, 2006年9月22日(月) (於: University of Bonn, Bonn, GERMANY)

吉田 伸生 (YOSHIDA NOBUO)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 40240303

日野 正訓(HINO MASANORI)
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号: 40303888

上木 直昌(UEKI NAOMASA)
京都大学・大学院人間環境学研究科・准教授
研究者番号: 80211069

会田 茂樹(AIDA SHIGEKI)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号: 90222455

植村 英明(UEMURA HIDEAKI)
愛知教育大学・教育学部・教授
研究者番号: 30203483

高信 敏(TAKANOBU SATOSHI)
金沢大学・理学部・教授
研究者番号: 40197124

6. 研究組織

(1)研究代表者

重川 一郎 (SHIGEKAWA ICHIRO)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00127234

(2)研究分担者

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 90234509

(3)連携研究者