

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340039

研究課題名（和文） 等角不変量をめぐる幾何学的函数論の新展開

研究課題名（英文） New development of geometric function theory focused on conformal invariants

研究代表者

須川 敏幸 (SUGAWA TOSHIYUKI)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号：30235858

研究成果の概要： 双曲計量，環状幅，調和測度などを幾何学的函数論やポテンシャル論の立場から研究し，多くの定理や応用を得た．また，等角計量を与えられたリーマン面間の正則写像の不変高階微分や不変シュワルツ微分についても研究を行い，その基本的な性質を明らかにした．

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	2,600,000	0	2,600,000
2006年度	2,500,000	0	2,500,000
2007年度	2,000,000	600,000	2,600,000
2008年度	2,100,000	630,000	2,730,000
年度			
総計	9,200,000	1,230,000	10,430,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：等角不変量，双曲計量，ポテンシャル論，リーマン面

1. 研究開始当初の背景

平面領域上の函数論は，20世紀に入ってからリーマン面上の函数論へと一般化・深化されてきた．リーマン面の考察においては，座標の取り方によらない定式化が必要となり，その際に重要となるのが等角不変量である．Nevanlinna, Beurling, Ahlfors らにより提唱されたいくつかの概念はリーマン面の理論において重要な役割を果たしてきた．しかし，ここしばらくは平面領域やリーマン面上の函数論も少し停滞しているように思われる．この停滞を開閉するには，新しい等角不変量を提案し，それを研究することが鍵になる可能性がある．

2. 研究の目的

幾何学的函数論において基本的な等角不変量，たとえば双曲計量，グリーン函数，調和測度など古典的によく調べられてきた諸量を詳しく調べ，さらに現代的視点から重要と考えられる新しい等角不変量を提示し，それらの性質を研究し応用を与えることが本研究の主要な目的である．

正則函数や調和函数について精密な評価を行うためには，単なる1回微分ではなく高階の導函数を含んだ自然な微分作用素（たとえば古典的なシュワルツ微分やその一般化を含む）について調べ，それらから自然に定まる函数空間の構造を調べることも重要な

テーマとなる。また、これら諸量が正則関数や擬等角写像、調和写像などによってどのように変化するか、またどのような変分公式に従うかを調べることも基本的である。また、関連する極値問題を調べ、現れる極値関数の性質を深く調べることによって、極値問題によって定義される等角不変量についての深い考察を行うことが可能となる。これらを通して未解決問題を解く糸口を見つけることもまた主要な目的の一つである。

3. 研究の方法

(1) 高階等角不変量の構築.

ヒントになるのが, Peschl により導入された不変微分作用素であるが, これはその後 Minda, Schippers らによって滑らかな等角軽量を持つリーマン面上の不変微分作用素に自然に拡張された. もう一つは, Aharonov, Tamanoi らによる高階シュワルツ微分である. これらを組み合わせることにより, 不変シュワルツ微分とも言うべきものが定義される. その基本的性質を調べることは重要な研究課題の一つである.

(2) 双曲計量の研究.

幾何学的関数論において最も重要な等角不変量はおそらく双曲計量である. 平面領域 (より一般にリーマン面) の双曲計量を詳しく調べることにより, その上の正則関数の挙動に関して有用な情報が得られることになる. 本研究では特に, リーマン面から3点を除いた領域の (境界点で錐特異性を許す) 双曲計量の密度を評価し, それを用いて一般の双曲計量に関する情報を引き出すことを目指した.

(3) 研究体制.

その他, いくつかの研究プロジェクトを実行するためには, 単独での研究の他に, セミナーや研究集会の実施, 外国人研究者の招聘, 逆に外国人研究者を訪問するなどの活動が重要となる. 本研究課題により実施した (定例のセミナー以外の) 活動は以下の通りである:

★本研究費による主な招聘研究者
Seong-A Kim 氏 (Dongguk Univ.)
Yong Chan Kim 氏 (Yeungnam Univ.)
Haseo Ki 氏 (Yonsei Univ.)
Kang-Tae Kim 氏 (POSTECH)
Kang-Hyurk Lee 氏 (ソウル大)
Eric Schippers 氏 (Univ. Manitoba)
Matti Vuorinen 氏 (Univ. Turku)
Henri Linden 氏 (Univ. Helsinki)
Vladimir Dubinin 氏 (Vladivostok, RAS)

★部分的援助を行った研究集会

2005 年度

第 40 回関数論サマーセミナー (霞ヶ浦研修所)

「等角写像論・値分布理論」合同研究集会 (日本工大)

The Ninth Conference on Real and Complex Analysis (広島大)

Mini-Workshop on Geometric Function Theory (広島大)

2006 年度

The Tenth Conference on Real and Complex Analysis (広島大)

「等角写像論・値分布理論」合同研究集会 (広島大)

Finland-Japan Joint Seminar on Analysis (広島大)

2007 年度

第 42 回関数論サマーセミナー (和歌山市)
「等角写像論・値分布理論」合同研究集会 (慶応大学)

The Eleventh Conference on Real and Complex Analysis (広島大)

2008 年度

The Twelfth Conference on Real and Complex Analysis (東北大情報)

4. 研究成果

須川敏幸:

(1) 高階等角不変微分作用素の研究.

これは主に Seong-A Kim 氏との共同研究である. Peschl-Minda 微分作用素が, 1 変数関数の合成の高階微分と同じ法則に従うことを示したほか, 不変シュワルツ微分というべきものを定義し, 研究を行った結果, Nehari の単葉性定理の高階の類似を得た (論文投稿中).

(2) 環状幅の応用.

これは主に Yong Chan Kim 氏, Ponnusamy 氏との共同研究である. 本研究以前に我々が提唱した環状幅という等角不変量の応用として, 有理型関数の単葉性判定法 (Ponnusamy 氏との共同), Chuaqui-Gevirtz の定理の環状幅による再定式化 (Y.C. Kim 氏との共同) を得た.

(3) 調和測度のハーディ族への応用.

これは主に Yong Chan Kim 氏との共同研究である. まず, 長年懸案であった単位円板上の一樣局所単葉正則関数がハーディ族に含まれるという予想を解決した. また, 与えられた領域に値を取る正則関数がつねに属するハーディ族の指数の最大値 (領域に対するハーディ指数) について研究を行い, 擬等角

写像に関する変動の評価を具体的に与えた。
(4) 双曲計量の研究.

これは主に G. Anderson 氏, M. Vuorinen 氏, M. Vamanamurthy 氏らとの共同研究である. 特殊函数 (特に超幾何函数) についての知見を用いて, (境界で錐特異性を許す) 3 点穴あき球面の双曲計量の具体的表示, 単調性, 具体的評価についていくつかの結果を得た.

(5) その他.

他にも, ハウスドルフのモーメント問題と幾何学的函数論に関する研究 (Ruscheweyh 氏, Salinas 氏との共同研究), Bloch 函数に対する Fekete-Szegő 型不等式とその応用 (寺田貴雄氏との共同研究), 1 次元タイヒミュラー空間の Bers 埋め込みの形状について (単独), Smale 予想の双対予想に関する研究

(Dubinin 氏との共同研究), Bazilevic 函数の研究 (Y. C. Kim 氏との共同研究) などを行った.

水田義弘:

変動指数をもつ関数空間において, 極大関数が重要な道具となる. 極大関数は $p > 1$ のとき L^p で有界であるが, $p = 1$ のとき有界でないため, 変動指数が 1 に近づくときには扱いが困難である. これを発展的に解消するために, 2 つの変動指数をもつ関数空間を設定し, 極大関数が一方から他方へ有界となることを示した. Hedberg は, 極大関数を利用すると, ソボレフの不等式が容易に示せることを発見した. 彼の方法を援用することにより, 極大関数の有界性から, 変動指数をもつ場合に, ソボレフ関数やリースポテンシャルに対するソボレフ型定理の発展を行った.

佐官謙一:

複素平面の原点を固定し単位円板を単位円板の上へ写す調和かつ K 擬等角である写像 F に対して, K が 1 に収束するとき漸近的にシャープであるように Heinz の不等式, Schwarz の補題を改良した. また, そのような写像は bi-Lipschitz 写像になることが知られているが, bi-Lipschitz 定数の評価を K が 1 に収束するとき漸近的にシャープであるような形で得た. また, F のヤコビアンの上限, 下限を F の最大変形率と $|F^{-1}(0)|$ で評価し, その応用を論じた. いずれも D. Partyka (Poland) との共同研究の成果である.

柴雅和:

流体力学的観点から等角写像について研究を行った.

吉野正史:

力学系の視点から解析的微分方程式の研究を行った.

谷口雅彦:

平面領域の標準領域 (等角同値類の代表元) として, Bell 領域を用いることを発見して,

そのような表現空間の構造を研究し多くの成果を得た. また, 固定点での因子という等角不変量を用いた有理関数の変形空間のパラメータ付けに即応したコンパクト化を完成させた.

志賀啓成:

(1) 複素力学系.

有理関数の Julia 集合が非連結な場合, その解析的性質および Fatou 集合の Martin compact 化などを考察した.

(2) Riemann 面.

単位円板からそれ自身への正則写像についての Denjoy-Wolff の定理を Riemann 面の正則写像へ拡張した.

(3) Klein 群論

Klein 群の単連結連結成分のリーマン写像を精力的に研究し, その連続殿研究の観点から正則関数の連続度に関する

Hardy-Littlewood の定理を拡張した. また, Holomorphic motion の拡張問題について新しい知見を得た.

松崎克彦:

漸近的タイヒミュラー空間に固定点をもつて作用する擬等角写像類群の部分群について, その特性を研究した. また, 発散型のクライン群について, その性質を研究した.

中西敏浩:

トレース関係式を用いてタイヒミュラー空間の研究を行った.

下村哲:

変動指数を持つルベグ空間, ソボレフ空間について研究を行った.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (60 件) (すべて査読有り)

[1] Yong Chan Kim and T. Sugawa, A note on Bazilevic functions, to appear in Taiwanese J. Math.

[2] St. Ruscheweyh, L. Salinas and T. Sugawa, Completely monotone sequences and universally prestarlike functions, to appear in Israel J. Math.

[3] Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev's inequality for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of integral form, to appear in Math. Nachr.

[4] Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity properties for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, to appear in Math. Inequal. Appl.

- [5] L. Liu, H. Shiga, Z. Sun, H. Wei, On some geometric properties of Teichmuller space, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu “Infinite dimensional Teichmuller space and moduli space”
- [6] H. Shiga, Modulus of continuity, a Hardy-Littlewood theorem and its application, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu “Infinite dimensional Teichmuller space and moduli space”
- [7] K. Matsuzaki, On quasiconformal invariance of convergence and divergence types for Fuchsian groups, to appear in Illinois J. Math.
- [8] K. Matsuzaki and Y. Yabuki, The Patterson-Sullivan measure and proper conjugation for Kleinian groups of divergence type, Ergodic Theory Dynam. Systems 29 (2009), 657-665
- [9] Yong Chan Kim and T. Sugawa, Uniformly locally univalent functions and Hardy spaces, J. Math. Anal. Appl. 353 (2009), 61-67
- [10] T. Terada and T. Sugawa, A coefficient inequality for Bloch functions with applications to uniformly locally univalent functions, Monatsh. Math. 156 (2009), 167-173
- [11] G. D. Anderson, T. Sugawa, M. K. Vamanamurthy, and M. Vuorinen, Hypergeometric functions and hyperbolic metric, Comput. Methods Funct. Theory 9 (2009), 269-284
- [12] S. Morosawa and M. Taniguchi, Dynamics of structurally finite entire functions with two singular values, Comput. Methods Funct. Theory 9 (2009), 185-198
- [13] E. Fujikawa, K. Matsuzaki and M. Taniguchi, Dynamics on Teichmuller spaces and self-covering of Riemann surfaces, Math. Z. 260 (2008), 865-888
- [14] M. Fujimura and M. Taniguchi, A compactification of the moduli space of polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 3601-3609
- [15] S. Ponnusamy and T. Sugawa, Norm estimates and univalence criteria for meromorphic functions, J. Korean Math. Soc. 45 (2008), 1661-1676
- [16] T. Sugawa, The limiting shape of one-dimensional Teichmuller spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 2849-2858
- [17] Yong Chan Kim and T. Sugawa, A note on a theorem of Chuaqui and Gevirtz, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 33 (2008), 273-279
- [18] Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, J. Math. Soc. Japan 60 (2008), 583-602
- [19] Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Integrability of maximal functions for generalized Lebesgue spaces with variable exponent, Math. Nachr. 281 (2008), 386-395
- [20] K. Matsuzaki and Y. Yabuki, Invariance of the Nayatani metrics for Kleinian manifolds, Geom. Dedicata 135 (2008), 147-155
- [21] K. Matsuzaki, Quasiconformal mapping class groups having common fixed points on the asymptotic Teichmuller spaces, J. Anal. Math. 102 (2007), 1-28
- [22] K. Matsuzaki, A quasiconformal mapping class group acting trivially on the asymptotic Teichmuller space, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 2573-2579
- [23] E. Fujikawa and K. Matsuzaki, Non-stationary and discontinuous quasiconformal mapping class groups, Osaka J. Math. 44 (2007), 173-185
- [24] K. Matsuzaki, The interior of discrete projective structures in the Bers fiber, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 32 (2007), 3-12
- [25] S. Kanas and T. Sugawa, Strong starlikeness for a class of convex functions, J. Math. Anal. Appl. 336 (2007), 1005-1017
- [26] J.-H. Choi, Y.-C. Kim and T. Sugawa, A general approach to the Fekete-Szegoe problem, J. Math. Soc. Japan 59 (2007), 707-727

- [27] Seong-A Kim and T. Sugawa, Invariant differential operators associated with a conformal metric, Michigan Math. J. 55 (2007), 459-479
- [28] Yong Chan Kim and T. Sugawa, The Alexander transform of a spirallike function, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007), 608-611
- [29] Y. Mizuta and T. Shimomura, Vanishing exponential integrability for Riesz potentials of functions in Orlicz classes, Illinois J. Math. 51 (2007), 1039-1060
- [30] D. Partyka and K. Sakan, Distortion of the area measure for one-to-one harmonic mappings of the unit disk onto itself, Sci. Bull. Chelm Math. Comput. Sci. 2 (2007), 39-48
- [31] D. Partyka and K. Sakan, On bi-Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 32 (2007), 579-594
- [32] M. Shiba, Univalence of a complex linear combination of two extremal parallel slit mappings, Analysis (Munich) 27 (2007), 301-310
- [33] Moonja Jeong, Jong-Won Oh and M. Taniguchi, Equivalence problem for annuli and Bell representations in the plane, J. Math. Anal. Appl. 325 (2007), 1295-1305
- [34] T. Nakanishi, A trace identity for parabolic elements of $SL(2, C)$, Kodai Math. J. 30 (2007), 1-18
- [35] E. Fujikawa and T. Sugawa, Geometric function theory and Smale's mean value conjecture, Proc. Japan Acad. 82 Ser. A, No. 7 (2006), 97-100
- [36] Yong Chan Kim and T. Sugawa, A conformal invariant for non-vanishing analytic functions and its applications, Michigan Math. J. 54 (2006), 393-410
- [37] S. Kanas and T. Sugawa, On conformal representations of the interior of an ellipse, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006), 329-348
- [38] Y. Komori, T. Sugawa, M. Wada and Y. Yamashita, Drawing Bers embeddings of the Teichmuller space of once-punctured tori, Exper. Math. 15 (2006), 51-60
- [39] Yong Chan Kim and T. Sugawa, Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions, Proc. Edinburgh Math. Soc. 49 (2006), 131-143
- [40] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential space of variable exponent, Math. Nachr. 279 (2006), 1463-1473
- [41] T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for variable exponent Riesz potentials on metric spaces, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006), 495-522
- [42] Y. Mizuta, Existence of tangential limits for alpha-harmonic functions on half spaces, Potential Anal. 25 (2006), 29-36
- [43] K. Kitaura and Y. Mizuta, Spherical means and Riesz decomposition for superbiharmonic functions, J. Math. Soc. Japan 58 (2006), 521-533
- [44] D. Partyka and K. Sakan, Three variants of Schwarz's lemma for harmonic mappings. Bull. Soc. Sci. Lett. lodz Ser. Rech. Deform. 51 (2006), 23-36
- [45] M. Taniguchi, The Teichmuller space of the ideal boundary, Hiroshima Math. J. 36 (2006), 39-48
- [46] D. Partyka and K. Sakan, On an asymptotically sharp variant of Heinz's inequality, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 30 (2005), 167-182
- [47] T. Sugawa and Seong-A Kim, Characterizations of hyperbolicly convex regions, J. Math. Anal. Appl. 309 (2005), 37-51
- [48] T. Sugawa and M. Vuorinen, Some inequalities for the Poincare metric of plane domains, Math. Z. 250 (2005), 885-906
- [49] T. Sugawa, A self-duality of strong starlikeness, Kodai Math. J. 28 (2005), 382-389

[50] J.-H. Choi, Y.-C. Kim, S. Ponnusamy and T. Sugawa, Norm estimates for the Alexander transforms of convex functions of order α , J. Math. Anal. Appl. 303 (2005), 661-668

[51] V. Gutlyanskii, O. Martio, T. Sugawa and M. Vuorinen, On the degenerate Beltrami equation, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 875-900

[52] T. Futamura and Y. Mizuta, Continuity of weakly monotone Sobolev functions, Adv. Math. Sci. Appl. 15 (2005), 571-585

[53] Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev's inequality for Riesz potentials with variable exponent satisfying a log-Hölder condition at infinity. J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), 268-288

[54] M. Masumoto and M. Shiba, Circularizable domains on Riemann surfaces. Kodai Math. J. 28 (2005), 280-291

[55] M. Taniguchi, Covering structure and dynamical structure of a structurally finite entire function, Kodai Math. J. 28 (2005), 430-438

[56] H. Shiga, On complex analytic properties of limit sets and Julia sets, Kodai Math. J. 28 (2005), 368-381

[57] H. Shiga, On the hyperbolic length and quasiconformal mappings, Complex Var. Theory Appl. 50 (2005), 123-130

[58] E. Fujikawa and K. Matsuzaki, Recurrent and periodic points for isometries of L^∞ spaces, Indiana Univ. Math. J. 55 (2006), 975-997

[59] K. Matsuzaki, Isoperimetric constants for conservative Fuchsian groups, Kodai Math. J. 28 (2005), 292-300

[60] K. Matsuzaki, A countable Teichmüller modular group, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005), 3119-3131

[学会発表] (計5件)

[1] 須川敏幸, "平面領域のポテンシャル論的性質と Hardy 空間", 2008.11.02 秋田市; 2008年度ポテンシャル論研究集会

[2] Toshiyuki Sugawa, "Hyperbolic metric and hypergeometric functions" 2008.07.31 Dongguk University, Korea; The 16th ICFIDCAA

[3] Toshiyuki Sugawa, "Uniformly perfect sets and Hardy spaces" 2007.08.28 University of Helsinki, Finland; Finland-Japan Joint Seminar on Analysis

[4] Toshiyuki Sugawa, "Hausdorff moment problem and polylogarithm" 2006.08.04 Hue University, Vietnam; 14th ICFIDCAA

[5] Toshiyuki Sugawa, "Circular widths of plane domains" (joint work with Yong Chan Kim) 2005.06.16 University of Joensuu, Finland; Computational Methods and Function Theory 2005

研究組織

(1) 研究代表者

須川 敏幸 (SUGAWA TOSHIYUKI)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 30235858

(2) 研究分担者

水田 義弘 (MIZUTA YOSHIHIRO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00093815
佐官 謙一 (SAKAN KEN-ICHI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 70110856

(3) 連携研究者

柴 雅和 (SHIBA MASAKAZU)
広島大学・大学院工学研究科・名誉教授
研究者番号: 70025469
吉野 正史 (YOSHINO MASAFUMI)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00145658
谷口 雅彦 (TANIGUCHI MASAHIKO)
奈良女子大学・理学部・教授
研究者番号: 50108974
志賀 啓成 (SHIGA HIROSHIGE)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10154189
松崎 克彦 (MATSUZAKI KATSUHIKO)
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 80222298
中西 敏浩 (NAKAHISNI TOSHIHIRO)
島根大学・総合理工学部・教授
研究者番号: 00172354
下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)
広島大学・大学院教育学研究科・准教授
研究者番号: 50294476