

研究種目：基盤研究（B）
 研究期間：2005～2008
 課題番号：17340043
 研究課題名（和文） ランダム行列に基づく自由確率論と作用素環の研究
 研究課題名（英文） Study of free probability and operator algebras based on random matrices
 研究代表者
 日合 文雄 (HIAI FUMIO)
 東北大学・大学院情報科学研究科・教授
 研究者番号：30092571

研究成果の概要：最近25年、D.Voiculescuが開拓した自由確率論は、非可換確率論の一つとして大きな発展を遂げた。自由確率変数の漸近モデルであるランダム行列や、自由確率論に固有なエントロピーである自由エントロピーを基に、自由確率論の研究を行った。関連して、代数的確率論、作用素論、作用素環、量子情報理論についても研究した。自由確率論における主要な成果は、自由エントロピーと自由エントロピー次元の新しい定式化、対数ソボレフ不等式と輸送コスト不等式の自由確率版の導出などである。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	3,100,000	0	3,100,000
2006年度	2,900,000	0	2,900,000
2007年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2008年度	2,700,000	810,000	3,510,000
年度			
総計	11,400,000	1,620,000	13,020,000

研究分野：作用素環，作用素論，量子確率論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：自由確率論，作用素環，ランダム行列，自由エントロピー，自由エントロピー次元，自由情報量，対数ソボレフ不等式，輸送コスト不等式

1. 研究開始当初の背景

代表者の日合は本研究開始時において、海外共同研究者の D.Petz と共同研究を進めており、自由確率論とランダム行列に関する以前の成果を共著“The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy” (Mathematical Surveys and Monographs, Vol.77, Amer. Math. Soc., 2000) に纏めた。さらに自由エ

ントロピー，自由圧力，自由フィッシャー情報量などが関係する自由対数ソボレフ不等式や自由輸送不等式について，Petz・植田と共同研究を始めた。幸崎は因子環の(融合)自由積の研究として，可測同値関係の自由積から作られる因子環の研究を始めており，また作用素の平均について，日合と体系的な研究を進め，“Means of Hilbert Space Operators”

(Lecture Notes in Math., Vol. 1820, Springer, 2003)に纏めた. 山上はテンソル圏の研究の一環として, テンソル圏の自由積の研究に着手した. 植田は作用素環の自由積や自由確率論の方法を用いて, 部分因子環の構造や群作用の研究に着手した. この方法は近年のフォン・ノイマン環の研究において最も有力なものである. 自由確率論の研究では, 組合せ論的なアプローチが重要であり, 微分幾何の観点から浦川が, また代数的確率論の観点から尾畑・洞が進めたグラフ・スペクトルとその漸近解析やランダム・ウォークの研究は, 本研究での役割が期待できた. このような背景のもと, 本研究は時機を得たものであると考えた.

2. 研究の目的

自由確率論は1980年代以降D. Voiculescuを中心に, 作用素環の自由積と密接に関連して発展している新しい非可換(=量子)確率論であり, 古典確率論の独立性に代わる自由性の概念が基本的である. 古典確率論においては確率変数が通常関数で可換($XY= YX$)であるのに対し, 非可換確率論においては確率変数が作用素または行列で非可換($XY \neq YX$)であることが特徴である. この自由確率論の急速な発展において, ランダム行列, 組合せ論, ポテンシャル論, エントロピー論などの他分野との関連が多く見出された. この理論はヒルベルト空間上の作用素論・作用素環論や行列論を数学的基礎とするが, 逆に自由確率論の結果と方法は最近の作用素論・作用素環の研究に強力な道具を提供している.

本研究の目的は, 主にランダム行列の手法を駆使して, 作用素環論と自由確率論の両方の考え方と方法を相互に関連させた融合的研究を行うことである. さらに, これらの理論の背後にある数学的構造を探求し, 従来の確率論の拡張と新しい定式化を志向する. 研究の特色と独創性は次の通りである.

(1) 解析的, 代数的, 確率論的な方法にとまらず, ランダム行列, 組合せ論, グラフ理論, エントロピーなどの技法を駆使して研究する.

(2) 従来の古典的な確率論における種々の概念と定理の自由確率論的類似を追求するとともに, ランダム行列近似を用いて, 古典確率から自由確率へ近接する考え方を重視する.

(3) 欧米における自由確率論に現れる作用素環はトレースをもつ II_1 型フォン・ノイマン環が中心であるが, 本研究では一般の C^* 環や非トレース的 III 型フォン・ノイマン環

も含む枠組みで研究する.

3. 研究の方法

研究分担者が各自の研究テーマで研究を行い, 必要に応じて共同研究を進めた. 特に, 日合-植田は堅密な共同研究で成果を上げた. 尾畑-洞も実のある共同研究を行った. 代表者の以前からの共同研究者である D. Petz (ハンガリー)には海外協力者として, 本研究の遂行に貢献してもらった.

各分担者は内外の関連する研究会・ワークショップに出席し, 研究打合せと情報収集をするとともに成果発表も行った. 本研究の計画実施においては, 日合と Petz が代表の日本・ハンガリー共同研究「自由確率論とランダム行列-新しい情報数理に向けて」(平成16-17年度)と「量子情報理論と量子確率論の新展開」(平成20-21年度)と関連させることができて, 有意義であった.

平成17年10月, 平成20年9月, 平成21年3月の3回仙台でワークショップを開催し, 延べで外国研究者10人, 日本人研究者15人程度を本科研費で招聘した.

各研究テーマについての研究の実施と方法は, 以下に述べる通りであった.

(1) ランダム行列の固有値分布と大偏差原理の研究(日合・Petz・植田): 自由確率論がランダム行列と関連して発展する過程で, Ben Arous-Guionnet と日合-Petz によって示されたランダム行列の固有値分布に対する新しいタイプの大偏差原理が重要な役割を果たしている. 多変数の非可換確率変数列に対応する大偏差原理は, 自由エントロピーの研究と不可分である. A. Guionnet 等の研究によってかなりの発展がもたらされたが, まだ完成にはほど遠い状況である.

(2) 自由エントロピー・自由エントロピー次元・自由フィッシャー情報量の研究(日合・Petz・植田): 古典的な確率論・情報理論で有用なボルツマン-ギブス・エントロピーとフィッシャー情報量の自由確率版として Voiculescu が導入した自由エントロピーと自由フィッシャー情報量に関しては, 数多くの問題が残されている. 自己共役およびユニタリの非可換確率変数だけでなく, 射影作用素の非可換確率変数に対する自由エントロピー・自由エントロピー次元について研究した. さらに, 射影作用素の場合のアイデアを用いて, 自由エントロピー・自由エントロピー次元と自由圧力関数に対する軌道アプローチを導入し, 自由相互情報量の研究を発展させた.

(3) 自由確率論における不等式の研究(日

合・Petz・植田)：本研究における特に注目すべき話題として、自由エントロピーおよび自由情報量が関係する自由確率論的な対数ソボレフ不等式や輸送コスト不等式を取り上げた。ランダム行列の手法を用いて、これらの不等式の自由確率版について系統的な研究を行った。特に輸送コスト不等式は、軌道アプローチによる自由エントロピーの性質を調べる上でも有用であった。

(4) スピン系における大偏差原理の研究(日合・Petz)：量子スピン C^* -環上のギブス状態、有限相関(マルコフ)状態、キューサイ・フリー状態などサイト間に相関がある状態に対する大偏差原理を研究し、量子仮説検定の漸近エラー限界に関する統一的な研究を行った。

(5) グラフや直交多項式に関係した量子中心極限定理とスペクトル漸近収束定理の研究(尾畑・洞)：グラフや群に関して種々のフォック空間を構成し、その上の生成・消滅作用素(量子調和振動子を一般化したモデル)から決まる種々の交換関係をもつ確率変数列について、量子分解の方法を用いて量子中心極限定理やスペクトル漸近収束定理を研究した。

(6) 他に、融合自由積因子環の構造解析と作用素不等式の研究(幸崎)、自由確率論と関連したテンソル圏と C^* -環の研究(山上)、無限グラフ上のランダム・ウォークとスペクトル解析(浦川・尾畑)、量子情報理論の量子論理(小澤)、などの研究を行った。

4. 研究成果

(1) 日合は、多変数の非可換確率変数に対して自由圧力関数を定義し、そのルジャンドル変換によって多変数の新しい自由エントロピーを導入した。これは、多変数の自由エントロピーに対する Voiculescu の2通りの方法(行列近似の方法と非可換ヒルベルト変換の方法)に加えて、第3の方法を提起するものである。一般にはルジャンドル変換を使う自由エントロピーは Voiculescu の自由エントロピーと必ずしも一致しないが、両者が一致する場合を考察し、またルジャンドル変換による定義を上手く修正すると、Voiculescu の自由エントロピーと常に等しくなるようにできることを示した。

(2) 日合・Petz・植田は、ランダム行列モデルによる近似の方法とユニタリ・ランダム行列の経験固有値分布に対する大偏差原理を用いて、サークル上の確率測度に対する自由対数ソボレフ不等式を証明した。この不等式は相対自由フィッシャー情報量と相対自由

エントロピーの大小関係を与える。

(3) 日合・植田は、 C^* -確率空間の枠組みで、多変数の自己共役(またユニタリ)非可換確率変数のトレース分布に対する自由確率論的な輸送コスト不等式を証明した。この不等式は、ポテンシャルが自由独立性と適当な凸性の条件を満たすとき、ワッサーシュタイン距離と相対自由エントロピーの平方根の大小関係を与える。

(4) 日合・Petz は、2個の独立でユニタリ不変なランダム射影行列について、それらの任意の多項式の固有値分布に対する大偏差原理を証明した。この結果は、2個の自己共役射影によって生成される普遍 C^* -環上のトレース状態からなる空間上で定式化され、大偏差原理のレート関数は2個の射影に対する自由エントロピーと一致する。

(5) 日合・植田は自己共役作用素に対する Voiculescu のマイクロ状態を用いた自由エントロピーの射影作用素に対する修正版を導入し、その基本性質を調べた。2つの射影作用素の自由エントロピーと Voiculescu のリベレーション理論における相互自由フィッシャー情報量の間の一対の対数ソボレフ不等式を示した。

(6) 日合・植田は射影作用素に対する定義を一般化して自己共役作用素の自由エントロピーに対する軌道アプローチを研究し、軌道アプローチによる自由エントロピー(次元)と通常的自由エントロピー(次元)の間に成立する関係式を与えた。軌道アプローチによる自由エントロピーは Voiculescu のリベレーション理論における相互自由情報量のマイクロ状態を用いた定式化としての意義がある。

(7) 日合・Petz は量子共分散と量子フィッシャー情報量との関係を考察し、不確定性原理と関連して知られていた不等式を一般化した。また、正定値行列のなす多様体上に行列の種々の平均と関連して定義されるリーマン計量についての測地最短距離や測地最短曲線の公式を与えた。

(8) 植田は幾何学群論で有用な HNN 拡張の構成法をフォン・ノイマン環に適用し、それによってできるフォン・ノイマン環のモジュラー理論、因子性、超積などについて考察した。また、関数環の峰点集合に関する結果の非可換拡張を示し、それを用いて非可換 H^p -空間の前双対の一意性を証明した。

(9) 尾畑はグラフに関係した漸近スペクトル解析を研究し、ツリー上の量子ウォークの理論が、量子分解の手法を使って、より一般のグラフに対しても成立することを示した。

さらに、尾畑はグラフに関係した調和解析・スペクトル解析を研究し、連結グラフの Q -行列が正定値になるパラメータの集合がグラフのある種の拡張で不変であることを示した。

(10) 洞・尾畑は成長する正規グラフの隣接行列の漸近スペクトル分布を量子確率論的手法で求めた。さらに、洞・尾畑は量子分解の方法によるグラフに関係した漸近スペクトル解析に関する一連の研究をまとめたテキストをシュプリンガー社から出版した。

(11) 尾畑は Ji との共同研究で、生成・消滅微分概念をフォック空間作用素に導入し、白色ノイズの微分を調べた。

(12) 浦川はコンパクトなコーシー・リーマン多様体上の変分問題の解としての擬 Yang-Mills 場の構成に対する 2 通りの方法を与えた。また、浦川はコンパクト・リーマン多様体上の熱核の平衡状態への収束の速さについて調べた。

(13) 幸崎は不確定性原理と関連する行列トレース不等式を証明した。また、幸崎はヒルベルト空間上で稠密な定義域をもつ正の自己共役作用素の組で、定義域の共通部分がゼロである面白い例をフーリエ解析などの手法を用いて多数構成した。

(14) 幸崎は行列・作用素の平均の研究において自然に現れる多くの正定値関数が無限分解可能な性質をもつことをアダマール因数分解定理を基礎とする複素関数論の方法を用いて示した。さらに、幸崎は実数直線上の正定値関数が無限分解可能であるための有用な判定条件を与え、作用素の平均に関する研究で現れる多くの正定値関数が無限分解可能であることを示した。

(15) 山上は作用素環とテンソル圏の関係の研究し、正規*ファンクターのカテゴリーと W^* 両加群のカテゴリーの同値性を示した。また、山上は状態の平方根の間の推移振幅を作用素環の表現論と関連させて研究し、正值形式の幾何平均に基づく変分表示を用いて、推移振幅の近似公式を与えた。

(16) 小澤は、観測過程における普遍的な不確定性原理の新しい定式化に成功した。小澤は、量子観測と量子情報に関する種々の問題を考察し、例えば、エンタングル状態における部分系の量子相関に関連して、量子完全相関概念を導入し、その観点から量子観測理論を研究した。さらに、小澤は集合論のブール値モデルの量子版として、フォン・ノイマン環の射影束で表現される量子論理に基づく集合論のモデルを構築し、ZFC 集合論からその量子版への転送定理を確立した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 37 件)

- 1) F. Hiai, Monotonicity for entrywise functions of matrices, *Linear Algebra Appl.*, 2009, to appear, 査読有
- 2) F. Hiai and D. Petz, Riemannian metrics on positive definite matrices related to means, *Linear Algebra Appl.*, 430, 3105-3130, 2009, 査読有
- 3) P. Gibilisco, F. Hiai and D. Petz, Quantum covariance, quantum Fisher information and the uncertainty principle, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 55, 439-443, 2009, 査読有
- 4) F. Hiai, T. Miyamoto and Y. Ueda, Orbital approach to microstate free entropy, *Internat. J. Math.*, 20, 227-273, 2009, 査読有
- 5) F. Hiai and Y. Ueda, A log-Sobolev type inequality for free entropy of two projections, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 45, 239-249, 2009, 査読有
- 6) U. C. Ji and N. Obata, Annihilation-derivative, creation-derivative and representation of quantum martingales, *Comm. Math. Phys.*, 286, 751-775, 2009, 査読有
- 7) Y. Ueda, On peak phenomena for non-commutative H^∞ , *Math. Ann.*, 343, 421-429, 2009, 査読有
- 8) M. Mosonyi, F. Hiai, T. Ogawa and M. Fannes, Asymptotic distinguishability measures for shift-invariant quasi-free states of fermionic lattice systems, *J. Math. Phys.*, 49, 072104, 1-11, 2008, 査読有
- 9) F. Hiai, M. Mosonyi and T. Ogawa, Error exponents in hypothesis testing for correlated states on a spin chain, *J. Math. Phys.*, 49, 007803, 1-22, 2008, 査読有
- 10) F. Hiai, M. Mosonyi, H. Ohno and D. Petz, Free energy density for mean field perturbation of states of a one-dimensional spin chain, *Rev. Math. Phys.*, 20, 335-365, 2008, 査読有
- 11) F. Hiai and Y. Ueda, Notes on microstate free entropy of projections, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 44, 49-89, 2008, 査読有
- 12) A. Hora and N. Obata, Asymptotic spectral analysis of growing regular

- graphs. Trans. Amer. Math. Soc., 360, 899-923, 2008, 査読有
- 13) T. Harada and H. Kosaki, On equality condition for trace Jensen inequality in semi-finite von Neumann algebras, Internat. J. Math., 19, 481-501, 2008, 査読有
- 14) H. Kosaki, On infinite divisibility of positive definite functions arising from operator means, J. Funct. Anal., 254, 84-108, 2008, 査読有
- 15) S. Yamagami, Geometric mean of states and transition amplitudes, Lett. Math. Phys., 84, 123-137, 2008, 査読有
- 16) F. Hiai, M. Mosonyi and T. Ogawa, Large deviations and Chernoff bound for certain correlated states on a spin chain, J. Math. Phys., 48, 123301, 1-19, 2007, 査読有
- 17) I. Csiszar, F. Hiai and D. Petz, Limit relation for entropy and channel capacity per unit cost, J. Math. Phys., 48, 092102, 1-10, 2007, 査読有
- 18) U. C. Ji, N. Obata and H. Ouerdiane, Quantum Levy Laplacian and associated heat equation, J. Funct. Anal., 249, 31-54, 2007, 査読有
- 19) N. Obata, Positive Q-matrices of graphs, Studia Math., 179, 81-97, 2007, 査読有
- 20) M. Ozawa, Transfer principle in quantum set theory, J. Symbolic Logic, 72, 625-648, 2007, 査読有
- 21) R. Bhatia and H. Kosaki, Mean matrices and infinite divisibility, Linear Algebra Appl., 424, 36-54, 2007, 査読有
- 22) S. Yamagami, Notes on operator categories, J. Math. Soc. Japan, 59, 541-555, 2007, 査読有
- 23) F. Hiai and D. Petz, Large deviations for functions of two random projection matrices, Acta Sci. Math. (Szeged), 72, 581-609, 2006, 査読有
- 24) F. Hiai and Y. Ueda, Free transportation cost inequalities for non-commutative multi-variables, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 9, 391-412, 2006, 査読有
- 25) F. Hiai, D. Petz and Y. Ueda, A free logarithmic Sobolev inequality on the circle, Canad. Math. Bull., 49, 389-406, 2006, 査読有
- 26) U. C. Ji and N. Obata, Unitarity of generalized Fourier-Gauss transforms, Stoch. Anal. Appl., 24, 733-751, 2006, 査読有
- 27) N. Obata, A note on Konno's paper on quantum walk, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 9, 299-304, 2006, 査読有
- 28) E. Barletta, S. Dragomir and H. Urakawa, Yang-Mills fields on CR manifolds, J. Math. Phys., 47, 083504, 41 pp., 2006, 査読有
- 29) H. Urakawa, Convergence rates to equilibrium of the heat kernels on compact Riemannian manifolds, Indiana Univ. Math. J., 55, 259-288, 2006, 査読有
- 30) M. Ozawa, Quantum perfect correlations, Ann. Physics, 321, 744-769, 2006, 査読有
- 31) H. Kosaki, On intersections of domains of unbounded positive operators, Kyushu J. Math., 60, 3-25, 2006, 査読有
- 32) N. Akiho, F. Hiai and D. Petz, Equilibrium states and their entropy densities in gauge-invariant C*-systems, Rev. Math. Phys., 17, 365-389, 2005, 査読有
- 33) F. Hiai, Free analog of pressure and its Legendre transform, Comm. Math. Phys., 255, 229-252, 2005, 査読有
- 34) M. Ozawa, Universal uncertainty principle in the measurement operator formalism, J. Opt. B Quantum Semiclass. Opt., 7, S672-S681, 2005, 査読有
- 35) M. Ozawa, Perfect correlations between noncommuting observables, Phys. Lett. A, 335, 11-19, 2005, 査読有
- 36) H. Kosaki, Matrix trace inequalities related to uncertainty principle, Internat. J. Math., 16, 629-645, 2005, 査読有
- 37) Y. Ueda, HNN extensions of von Neumann algebras, J. Funct. Anal., 225, 383-426, 2005, 査読有

[学会発表] (計 14 件)

(研究代表者の分のみ)

- 1) F. Hiai, Orbital approach to free entropy and free pressure, 2008 Global Korean Mathematical Society International Conference, October 23-25, 2008, ICC, Jeju, Korea.
- 2) F. Hiai, Mutual information and mutual pressure, Conference "Information and Communication", August 25-28, 2008, Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary.
- 3) F. Hiai, Pressure and its Legendre transform in microstate free entropy, 11th Workshop "Non-commutative

- Harmonic Analysis with Applications to Probability”, August 17–23, 2008, Bedlewo, Poland.
- 4) F. Hiai, Free pressure, free entropy and hypothesis testing, Workshop “Free Probability, Extensions, and Applications”, January 13–18, 2008, Banff International Research Station.
 - 5) F. Hiai, Large deviations for certain correlated states on a spin chain, 28th Conference “Quantum Probability and Related Topics”, September 2–8, 2007, CIMAT, Guanajuato, Mexico.
 - 6) F. Hiai, Free energy density for mean field perturbation of states of a one-dimensional spin chain, 10th Workshop “Non-commutative Harmonic Analysis with Applications to Probability”, August 6–12, 2007, Bedlewo, Poland.
 - 7) F. Hiai, Entropy density and free energy density: variational expressions, 14th Conference of the International Linear Algebra Society, July 16–20, 2007, Shanghai University, Shanghai, China.
 - 8) F. Hiai, From entropy to relative entropy, The 2007 Korea Operator Theory and Its Applications Conference (KOTAC 2007), June 21–23, 2007, Hanyang University, Seoul, Korea.
 - 9) F. Hiai, Discretization of classical mutual information (a joint work with D. Petz), International Conference in QBIC 2007, March 14–17, 2007, Tokyo University of Science, Noda, Japan.
 - 10) F. Hiai, Orbital approach to free entropy dimension (based on joint work with Y. Ueda and T. Miyamoto), Luminy conference on random matrices, October 30–November 3, 2006, CIRM, Luminy, France.
 - 11) F. Hiai, Inequalities related to free entropy—Baby Talk—, 9th Workshop “Non-commutative Harmonic Analysis with Applications to Non-commutative Probability”, September 29–October 5, 2006, Bedlewo, Poland.
 - 12) F. Hiai, Orbital approach to the microstate free entropy, 9th Workshop “Non-commutative Harmonic Analysis with Applications to Non-commutative Probability”, September 29–October 5, 2006, Bedlewo, Poland.
 - 13) F. Hiai, Free transportation cost inequality and free pressure — Problems—, ARCC Workshop “Free

- Analysis”, June 19–23, 2006, American Institute of Mathematics, Palo Alto.
- 14) F. Hiai, Free transportation cost inequality and random matrix approximation, Fejer–Riesz Conference, June 9–13, 2005, Eger, Hungary.

[図書] (計1件)

- 1) A. Hora and N. Obata, Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs, Springer-Verlag, 2007, 371 pp.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

日合 文雄 (HIAI FUMIO)
 東北大学・大学院情報科学研究科・教授
 研究者番号：30092571

(2) 連携研究者

尾畑 伸明 (OBATA NOBUAKI)
 (平成17～19年度は分担者)
 東北大学・大学院情報科学研究科・教授
 研究者番号：10169360

浦川 肇 (URAKAWA HAJIME)
 (平成17～19年度は分担者)
 東北大学・大学院情報科学研究科・教授
 研究者番号：50022679

小澤 正直 (OZAWA MASANAO)
 (平成17～19年度は分担者)
 名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授
 研究者番号：40126313

幸崎 秀樹 (KOSAKI HIDEKI)
 (平成17～19年度は分担者)
 九州大学・大学院数理学研究院・教授
 研究者番号：20186612

山上 滋 (YAMAGAMI SHIGERU)
 茨城大学・理学部・教授
 研究者番号：90175654

洞 彰人 (HORA AKIHITO)
 (平成17～19年度は分担者)
 名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
 研究者番号：10212200

植田 好道 (UEDA YOSHIMICHI)
 (平成17～19年度は分担者)
 九州大学・大学院数理学研究院・准教授
 研究者番号：00314724

中村 誠 (NAKAMURA MAKOTO)
 (平成17～19年度は分担者)
 東北大学・大学院理学研究科・准教授
 研究者番号：70312634