

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2005～2008

課題番号：17340048

研究課題名 (和文) 可積分系におけるコホモロジーと対称性

研究課題名 (英文) Cohomologies and symmetries in integrable systems

研究代表者

中屋敷 厚 (NAKAYASHIKI ATSUSHI)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：10237456

研究成果の概要：アーベル関数、つまり多重周期的有理形関数、の空間の微分構造を、ある場合に完全に決定した。すなわち、基本となる関数を特定し、それを次々に微分してゆくとすべての関数が得られることを示し、それらの関数の微分の中に成り立つ関係式をすべて決定した。そのための重要な道具として、多変数のシグマ関数、つまり、ある種の良い性質を持つ多重擬周期的正則関数にたいして、そのべき級数展開の代数性という基本性質を証明した。また量子群の頂点作用素について研究し、その行列要素の積分表示と、知られている qKZ 方程式の解の表示とが一致することを示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	1,200,000	0	1,200,000
2006 年度	1,100,000	0	1,100,000
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
総計	4,500,000	660,000	5,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：アーベル関数・テータ関数・タウ関数・ D -加群・可積分系・シユア関数・ qKZ 方程式・量子群

1. 研究開始当初の背景

超楕円曲線のアフィンヤコビ多様体のアフィン環の D -加群構造について以前の研究で提案した予想があった。これは古典的可積分系に関連した研究から得られたものであるが、対応する量子系である 2 次元可積分場の量子論の、局所作用素の空間の、可換な保存量のなす環上の加群としての構造は決定されていた。そこでは、局所作用素の空間を、

1 のべき根における量子群の表現を用いて記述でき、その表現が自由場で表現されていることが重要であった。

2. 研究の目的

(1) アフィン超楕円ヤコビ多様体のアフィン環の D -加群構造に関する予想の証明および拡張を目指す。特に多様体が退化した場合を記述するシュア関数などの対称多項式の性質を研究する。

(2) ヤコビ多様体上の明示的アーベル関数論を展開する。(1)の予想が解決すれば、超楕円ヤコビ多様体の場合の関数論の大きな基礎が確立されることになるが、逆によい加法定理などがうまくみつけられれば(1)を解決するための有力な手段となる。これはソリトン理論をこえる試みの一つである。

(3) 上記古典的可積分系に関する結果を踏まえ、量子可積分系における作用素の空間および相関関数の性質を研究する。これは1のべき根における量子群やその楕円拡張の研究を含む。

3. 研究の方法

(1) テータ因子の特異点を解析し、アーベル関数の微分構造への影響を詳しく調べる。

(2) 上記予想を立てるときに大きな役割を果たした指標の方法を積極的に活用する。

(3) 1のべき根における量子群との関係を研究しながら、古典、量子系の研究を並行して行う。

(4) 無限次元の可積分系にも話を拡張する。そこでは無限次元の対称性を武器として使う。

4. 研究成果

(1) 主編極アーベル多様体のなかでテータ因子が非特異であるものについて、テータ因子にのみ高々極を持つ有理関数のなす D -加

群の自由分解を明示的に決定した。そこでは指標の方法が効果的に応用された。

(2) アフィン超楕円ヤコビ多様体のアフィン環の D -加群構造に関する予想を種数3の場合に解決した。Klein のシグマ関数とよばれるテータ関数の性質を用いてテータ因子の特異点を詳しく解析することにより証明した。その副産物としてテータ因子にのみ高々極を持つアーベル関数の空間のベクトル空間としての基底を明示的に構成した。論文は投稿中。プレプリントは arxiv:0809.3303.

(3) (n, s) 曲線とよばれる平面代数曲線から作られる多変数のシグマ関数について、その原点におけるべき級数展開の初期項が無限遠における空隙列から定まるシュア関数となること、および、展開係数は曲線の定義方程式の係数の同次多項式になることを証明した。この結果は(2)の研究に応用された。論文は投稿中。プレプリントは arxiv:0803.2083

(4) 普遍グラスマン多様体に埋め込まれた (n, s) 曲線のアフィン環に対応するタウ関数の、シグマ関数による表示式を作った。この結果から(3)の結果の別証明が得られた。

(5) $sl(2)$ のアフィン量子群の q -脇本加群の頂点作用素から得られる qKZ 方程式の解の積分表示が、松尾-Tarasov-Varchenko による解の積分表示と一致することを、スピン $1/2$ の表現のテンソル積の場合に証明した。

(6) ある種の二つの対称式の値を指定したときの差積の平方に関する最大値を評価すること、並びに差積の平方と対称式の片方の値を指定したときの、もう一方の対称式の最小値を評価する問題を考察した。とくに後者の問題について、Selberg による評価を特殊多項式である Jacobi 多項式の性質を用いて改良した。

(7) 楕円代数 $U_{\{q, p\}}(\widehat{sl}_2)$ に Hopf algebroid としての余代数構造を見出し、 $U_{\{q, p\}}(\widehat{sl}_2)$ を楕円量子群として定式化した。これの有限次元表現のテンソ

ル積構造を調べ、楕円超幾何級数

$\{_{12}V_{11}\}$ が Clebsch-Gordan 係数として
導出出来ることを示した。

(8) 8 頂点模型の形状因子について、パラ
メータが無反射点系列と呼ばれる値を取る
場合に表式がどのように簡略化するか調べ、
二重周期の無限積を用いて書き下した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に
は下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

①黒木和憲、中屋敷厚、Free field approach
to solutions of the quantum Knizhnik
Zamolodchikov equations、Symmetry,
Integrability and Geometry: Methods and
Applications(電子誌)、4 巻、049、13 pages、
2008、査読有

②趙康治、中屋敷厚、Differential structure
of Abelian functions、International
Journal of Mathematics、19 巻、145-171、
2008、査読有

③趙康治、他 2 名、Uniqueness and examples
Of compact toric Sasaki-Einstein metrics,
Communications in Mathematical Physics,
277 巻、439-458、2008、査読有

④今野均、Elliptic quantum group
 $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ and vertex
operaors、Journal of Physics A, Mahemathical
and Theoretical、41 巻、
194012、12 pages、2008

⑤金子讓一、On an extremal problem of
Selberg. II、Journal of Approximation
Theory、146 巻、276-281、2007、査読有

⑥金子讓一、On an extremal problem of
Selberg. I、Journal of Approximation
Theory、142 巻、129-137、2006、査読有

⑦今野均、Dynamical R-matrices of elliptic
quantum groups and connection matrices for
the qKZ equations、Symmetry, Integrability
and Geometry: Methods and Applications (電
子誌)、2 巻、091、25 pages、2006、査読有

⑧桑野泰宏、Form factors and vertex
operators in the XYZ antiferromagnet、in
“Elliptic Integrable Systems” (eds
M.Noumi and K. Takasaki)、Rokko Lectures
in Mathematics 18、173-182、2005、査読無

[学会発表] (計 14 件)

①中屋敷厚、Modular invariant tau
functions of the KP-hierarchy、研究会「テ
ータ関数と可積分系」、2008 年 12 月、九州大
学

②中屋敷厚、Expressions of theta functions
in terms of prime form and their
applications、セミナー「Concrete theory of
Abelian functions and its applications」、
2008 年 7 月、岩手大学

③今野均、Elliptic quantum group
 $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ and its
representations、国際会議「Elliptic
Integrable Systems, Isomonodromy Problems
and Hypergeometric Functions」、2008 年 7
月、Max Planck Institute、Bonn, Germany

④金子讓一、Constrained exremal problems
Of difference product、アクセサリーパラメ
ーター研究会、2007 年 10 月、熊本大学

⑤今野均、Elliptic quantum group
 $U_{\{q,p\}}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, H-Hopf algebroid
Structure and elliptic hypergeometric

series、研究会「組み合わせ論的表現論の拡がり」、2007年10月、京都大学数理解析研究所

⑥ 中屋敷厚、多変数シグマ関数の代数的表示、日本数学会秋季総合分科会、2007年9月、東北大学

⑦ 中屋敷厚、シグマ関数の代数的表示、整数論サマースクール「種数の高い代数曲線とアーベル多様体」、2007年8月、大沢温泉、花巻、岩手

⑧ 中屋敷厚、Fayの公式の退化、日本数学会年会、2007年3月、埼玉大学

⑨ 桑野泰宏、Vertex operators and correlation Functions in Belavin's Zn symmetric model、ワークショップ「Solvable Models and Representation Theory」、2006年9月、Moscow、Russia

⑩ 中屋敷厚、Abelian functions as a D-module、研究会「Methods of Integrable Systems In Geometry」、2006年8月、University of Durham、UK

⑪ 中屋敷厚、テータ関数の微分構造、筑波大学談話会、2006年6月、筑波大学

⑫ 金子譲一、セルバーグのある極値問題について、超幾何方程式研究会、2006年1月、神戸大学

⑬ 桑野泰宏、Form factors in the eight vertex model at reflectionless point、研究集会「Recent Advances in Quantum Integrable Systems」、2005年9月、Annecy-le-Vieux、France

⑭ 中屋敷厚、Differential structure of Abelian functions、研究会「Geometry and Abelian functions」、2005年5月、首都大学東京

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中屋敷 厚 (NAKAYASHIKI ATSUSHI)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：10237456

(2) 研究分担者 ()

研究者番号：

(3) 連携研究者

趙 康治 (CHO KOJI)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：10197634

桑野泰宏 (KUWANO YASUHIRO)
鈴鹿医療科学大学・医用工学部・教授
研究者番号：80309038

今野 均 (KONNO HITOSHI)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00291477

金子 譲一 (KANEKO JOUICHI)
琉球大学・理学部・教授
研究者番号：10194911