

研究種目：基盤研究 (C)
研究期間： 2005 ~ 2008
課題番号：17530653
研究課題名 (和文) 数学教育における直観幾何と論証幾何の構成的な接続による図形領域カリキュラムの開発
研究課題名 (英文) Curriculum Development based on constructive relationships between Intuitive Geometry and Demonstrative Geometry in School Mathematics
研究代表者 伊藤 武廣 (ITO TAKEHIRO) 信州大学・教育学部・教授 研究者番号：00015827

研究成果の概要：本研究の成果は、直観幾何の学習と論証幾何の学習の間にある不整合の特定と、直観幾何の学習と論証幾何の学習を接続するためのカリキュラムの開発である。前者については、命題の全称性の認識における不整合と、中学校数学の論証幾何カリキュラムにおける「証明」の定義における不整合を特定した。後者については、内容知での接続のために、中学第1学年図形領域「空間図形」カリキュラムを開発するとともに、方法知「証明・説明」での接続のために、証明の学習の諸相を整理するための枠組みを開発した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	1,100,000	0	1,100,000
2006年度	700,000	0	700,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,500,000	510,000	4,010,000

研究分野：数学教育

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：カリキュラム開発, 直観幾何, 論証幾何, 構成的な接続, 証明

1. 研究開始当初の背景

主に小学校で直観幾何が扱われ中学校で論証幾何で扱われている。小学校では図形の諸性質や関係の習得が主になり、証明の素地形成が不十分になりがちである。一方、中学校では、小学校で既習の内容を証明するとともに、これまでの説明の仕方と結び付けることなく、証明の作り方や書き方を指導するため、子どもの学習は意欲的なものにならない。このように、学校数学の図形領域において、直観幾何の学習と論証幾何の学習の間には、内容知（図形の諸性質や関係など）及び方法知（説明や証明等）に関して不整合があり、こ

の解消が数学嫌いや数学不要という学習状況の改善に不可欠である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、学校数学における直観幾何の学習と論証幾何の学習の間にある不整合を特定し、この不整合を解消するために、子どもの学習実態や可能性に即して、直観幾何と論証幾何を接続するためのカリキュラムを開発することである。

3. 研究の方法

前述の目的を達成するために、主に次の2

つの考察を行った。

(1) 直観幾何の学習と論証幾何の学習の間にある不整合の特定

直観幾何の学習と論証幾何の学習の間にある不整合には、子ども固有の認識によるものと、カリキュラムに起因するものがある。まず、子ども固有の認識による不整合に関して本研究では、論証幾何で証明の意味・意義の一つとされる、命題の全称性の認識に焦点をあて、この認識を捉える枠組みを構築するとともに、この枠組みに基づいて子ども固有の認識を特定した。また、カリキュラムに起因する不整合に関して本研究では、中学校数学の論証幾何カリキュラムにおける「証明」の定義に焦点をあて、カリキュラムにおける「証明」の定義に関する不整合を我が国の検定教科書を全て分析することによって特定した。

(2) 直観幾何の学習と論証幾何の学習を接続するためのカリキュラムの開発

直観幾何の学習と論証幾何の学習を接続するためのカリキュラムとして、中学校第一学年図形領域のカリキュラム開発を行った。この開発過程で、図形の内容知レベルで直観幾何の学習と論証幾何の学習を接続するだけでなく、証明・説明という方法知レベルでも学習を接続する必要性が明らかとなり、証明の学習の諸相を特定し、それらを整理するための枠組みの構築と、その枠組みに基づいて学習の諸相を整理した。

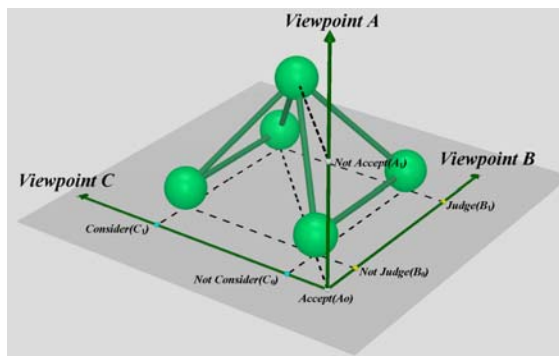
4. 研究成果

(1) 直観幾何の学習と論証幾何の学習の間にある不整合の特定に関する成果

直観幾何の学習と論証幾何の学習の間にある不整合のうち、子ども固有の認識による不整合として、命題の全称性の認識に焦点をあて、カリキュラムに起因する不整合として、中学校数学の論証幾何カリキュラムにおける「証明」の定義に焦点をあてた。

命題の全称性に対する子ども固有の認識における不整合について次のことが特定された：次の3つの視点（視点 A：命題と、実験・実測の結果との一致／不一致を、命題の全称性の規準とするか、視点 B：命題と実験・実測の結果が必ず一致とするか、視点 C：一致／不一致の判断にあたって、実験・実測方法の改善を考慮するか）に基づいて、学校数学図形領域において、実験・実測による命題の全称性の確立にかかわる子どもの認識をとらえる概念枠組みとして、5つの代表的様相（「イデア論 idealism / 目的論 teleology」, 「悲観論 pessimism」, 「楽観論 optimism」, 「現実主義 actualism」, 「素朴な予定調和 naïve

pre-established harmony」）からなる四角錐モデルを構築した。このモデルにおいて子ども固有の認識は5つの代表的様相の間に中間的様相として特定される。



特に、生徒の内的ゆらぎが顕著に現れやすい「現実主義 actualism」と「素朴な予定調和 naïve pre-established harmony」の間の中間的様相に着目し、質問紙調査の記述に基づいて、内的ゆらぎの特徴について考察した結果、次の3種類の実相を子ども固有の認識として特定した：条件「測定精度の向上」による命題と実験・実測による結果の一致への接近可能性、条件「特定の」行為者による実験・実測の遂行」における命題と実験・実測による結果の一致可能性、目的「活動の保障」志向による命題と実験・実測による結果の一致の必要性。

一方、中学校数学の論証幾何カリキュラムにおける「証明」の定義に関する不整合について次のことが特定された：我が国の中学校用数学科の教科書（全六種類）のうち、5種類では、証明の定義における根拠の規定と、根拠の集まりとは相互に一貫していない。そして、残り1種類では、一貫性の有無が不明である。相互一貫性の欠如の一因として、同一の命題に対して正しさに関する異なる基準(子どもの知り得る事実との対応/何らかの前提からの演繹)が中学校第2学年の図形領域とそれ以前(小学校図形領域を含む)とで使い分けられていることがある。

(2) 直観幾何の学習と論証幾何を接続するためのカリキュラムの開発に関する成果

直観幾何と論証幾何の接続に必要なカリキュラム開発に関して、中学第1学年図形領域「空間図形」は、直観的な判断と論理的な判断の差異が明確になる教材が多くある。そのため、直観幾何と論証幾何の接続に必要なカリキュラム開発に適した単元である。そこで、直接証明と間接証明の素地を形成するため、新たな教材を導入し、指導展開案を作成した。新たな教材のなかには、たとえば、立方体の切断面の形状について考察するとともに、その形状になる理由、あるいは、ある形状になることはあり

得ない理由を立方体の諸性質に基づき説明するものなどが含まれている。

直観幾何の学習と論証幾何の学習を接続するためのカリキュラム開発過程で、子どもの学びの連続性のために、図形の内容知レベルだけでなく、証明・説明という方法知レベルでも直観幾何の学習と論証幾何の学習を接続する必要性が明らかとなった。

証明・説明という方法知レベルにおける直観幾何の学習と論証幾何の学習の接続に関して、証明に関する3つの捉えを基に、3つの軸（証明の構造を学習する軸、証明する活動を学習する軸、証明の機能を学習する軸）を定め、これらの軸に基づいて証明の学習を規定する可能性について考察した。その上で、3つの軸のうち、証明の構造を学習する軸と、証明する活動を学習する軸に着目し、各軸に含まれる学習の諸相を次のように特定した。

証明の構造を学習する軸の諸相：

- ①証明を全体として構成・認識する。
- ②特称命題と全称命題の関係を構成・認識する。
- ③特称命題と全称命題の諸関係を組織化する。

証明する活動を学習する軸の諸相：

- (a)証明する活動に伴う内的な過程を全体的に進展する。
- (b)総合的推論と解析的推論によって中間命題を派生する。
- (c)二種類の中間命題の関係網に基づいて、前提と結論の間に演繹的な推論の連鎖を確立する。

これらの軸の組み合わせにより証明の学習を9つの相に区分し、これらを各軸の諸相の階層性に基づいて3つに類型化した。

(c) 二種類の中間命題の関係網に基づいて、前提と結論の間に演繹的な推論の連鎖を確立する。			統合的な学習
(b) 総合的推論と解析的推論によって中間命題を派生する。		関係的な学習	
(a) 証明する活動に伴う内的な過程を全体的に進展する。	全体的な学習		
証明する活動	(1)証明を全体として構成・認識する。	(2) 特称命題と全称命題の関係を構成・認識する。	(3) 特称命題と全称命題の諸関係の組織化する。
証明の構造			

以上の枠組みから、ある類型の学習のために、いかなる類型及び諸相の学習が前提とされるべきか／この枠組みにおいて、従来から意図されてきた学習がどこに位置づけるのか／ある類型の学習が充実されるために、どのような学習が新たに意図されるべきであるのかが明らかにされる可能性が示唆された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① Miyazaki, M., Cognitive Incoherence of Students Regarding the Establishment of Universality of Propositions through Experimentation/Measurement, International Journal of Science and Mathematics Education, 6(3), 533-558, 2008, 査読有
- ② 伊藤武広, 球面の特徴付け：まるく見える曲面は球面か, 信州大学教育学部紀要, 119, 2007, pp.189-196, 査読無
- ③ K. Chino, T. Morozumi, H. Arai, F. Ogihara, Y. Oguchi, & M. Miyazaki, The effects of "spatial geometry curriculum with 3D DGS" in lower secondary school mathematics, In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, 2007, pp.137-144, 査読有
- ④ ITO, T., A Useful Characterization of Some real Hypersurfaces in a Nonflat Complex Space Form, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Math, 54, 2006, pp.125-136, 査読有
- ⑤ 宮崎樹夫, 中学校数学における証明の学習活動に論証に関する研究：証明の諸特性と子供の営みに基づく、諸活動の分類枠組みの設定, 日本数学教育学会 第38回数学教育論文発表会論文集, 2005, pp.493-498, 査読無

[学会発表] (計8件)

- ① 宮崎樹夫, 数学教育における証明研究の新たな枠組みに向けて：主体－客体の関係を越えて, 日本科学教育学会年会論文集 3 2 (日本科学教育学会第32回年会：岡山大学(岡山市), pp. 151-152, 2008)
- ② 宮崎樹夫, 中学校数学における証明の学習の諸相を整理する枠組みの構築：証明の構造と、証明する活動に焦点をあてて、

- 日本数学教育学会 第41回数学教育論文発表会論文集、2008
- ③ 宮崎樹夫、我が国の数学教育における3次元動的幾何ソフトの活用に関わる研究の「実」と「種」、日本科学教育学会年会論文集31（日本科学教育学会第31回年会：北海道大学（札幌市）、pp.369-370、2007
- ④ K. Chino, T. Morozumi, H. Arai, F. Ogihara, Y. Oguchi, & M. Miyazaki. The effects of "spatial geometry curriculum with 3D DGS" in lower secondary school mathematics, Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp.137-144), 2007
- ⑤ Miyazaki, M., Arai, H., Chino, K., Ogihara, F., Oguchi, Y., & Morozumi, T. Development of web environment for lower secondary school mathematics teachers with 3D dynamic geometry software. In Novotna, J., Moraova, H., Kratka, M., & Stehlikova, N. (Eds.). Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, p. 409, 2006, Prague: PME.
- ⑥ 両角達男, 新井仁, 伊藤武廣, 岩永恭雄, 小口祐一, 茅野公穂, 宮崎樹夫、中学校数学における3次元動的幾何ソフトの利用に関する研究：「空間図形のカリキュラム」による情意的な効果, 日本科学教育学会年会論文集30（日本科学教育学会第30回年会：筑波学院大学（つくば市）, pp.387-388, 2006
- ⑦ 茅野公穂, 新井仁, 伊藤武廣, 岩永恭雄, 小口祐一, 宮崎樹夫, 両角達男、中学校数学における3次元動的幾何ソフトの利用に関する研究：「空間図形のカリキュラム」による認知的な効果, 日本科学教育学会年会論文集30（日本科学教育学会第30回年会：筑波学院大学（つくば市）, pp.391-392, 2006
- ⑧ 宮崎樹夫, 新井仁, 伊藤武廣, 岩永恭雄, 小口祐一, 茅野公穂, 両角達男、中学校数学における3次元動的幾何ソフトの利用に関する研究：空間図形のカリキュラム開発における新たな可能性, 日本科学教育学会年会論文集30（日本科学教育学会第30回年会：筑波学院大学（つくば市）, pp.389-390, 2006

〔図書〕（計1件）

- ① 宮崎樹夫、新井仁、荻原文弘、小口祐一、茅野公穂、両角達夫、空間図形の不思議

な世界：3次元動的幾何ソフトならここまでできる、『新世紀型理数科系教育の展開研究 授業実践のためのすぐ使える新コンテンツ・カリキュラム：より幅広い活用を願って』（第2章第2節）、Retrieved December 10, 2007, from http://nime-glad.nime.ac.jp/program/search/pdf/a03-all_ver3.pdf.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 武廣 (ITO TAKEHIRO)
信州大学・教育学部・教授
研究者番号：00015827

(2) 研究分担者

宮崎 樹夫 (MIYAZAKI MIKIO)
信州大学・教育学部・教授
研究者番号：10261760

(3) 連携研究者

なし