

平成 21 年 06 月 08 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2005 年度～2008 年度

課題番号：17540048

研究課題名 (和文) CM 体の相対類群の構造と類数 1 問題

研究課題名 (英文) Structure of relative class groups of CM-fields and class number one problem

研究代表者 岡崎 龍太郎

同志社大学 理工学部 准教授
20268113

研究成果の概要：

同時ペル方程式 $x^2 - a z^2 = y^2 - b z^2 = 1$ の正の整数解の個数が 2 個以下だという定理を証明し、雑誌論文として発表した。また、より一般的で、代数的数体との関係の深い不定符号の一般化された同時ペル方程式 $|a_1 x^2 - a z^2| = |b_1 y^2 - b z^2| = 4$, (a_1, a, b_1, b : 正のパラメーター, x, y, z : 未知整数) を研究した。不定符号の一般化された同時ペル方程式に適用できるように Yuan の p -進的な間隙原理を一般化した。実複 2 次体の類群の研究の発展につながる研究であり、8 次以上の CM 体の類群の構造の研究にフィードバックが期待される。

導手が 2 の巾の円分体の実部文体の類数が常に 1 であるとの Weber の予想がある。Weber のこの予想の研究に単数の大きさの下からの評価が有効である。類体論の計算的側面や不定方程式の研究で培った技術を応用することにより、次のような評価を得た: K を該当する体の 1 つとし、その導手を f で表す。 F を K の部分体のうち $[K:F]=2$ を満たす唯一のものとする。 K の単数 ε の F へのノルムが -1 であるとの条件の下で、 ε の平方の有理数体へのトレースは $f(f/2-1)/4$ 以上である。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	1,600,000	0	1,600,000
2006 年度	500,000	0	500,000
2007 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	3,600,000	450,000	4,050,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学 4101

キーワード：代数的数体, 単数群

1. 研究開始当初の背景

不定方程式は整数論の分野の端緒とな

る問題である。また、不分岐拡大の構成、代数的数体のパラメーター族の重複の研究、

代数的数体の単数のコントロールなどに使われている。不定方程式は解の無限族が見つかる場合、解の個数の有限性がわかる場合、解の大きさの上界が分かる場合、個別の方程式の解が全て分かる場合などがある。このうち有限性については、方程式の形を詳しく決めないと解の個数の評価がよくできないことが通例だった。解を全て見つけるにはさらに方程式の形を詳しく決める必要があった。

Bennettの研究に触発されて本研究者が不定方程式の解の間隙原理を見つける連続的な方法を発見して数年がたった。この方法を3次のThue方程式に応用して、 $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 1$ の形の方程式で左辺が3重根をもたないものについて判別式が十分に大きいとの技術的な条件の下で整数解の個数が7個以下になることを本研究者が示していた。

同時ペル方程式は単数群が小さくイデアル類群の大きな体を見つける研究の上で重要である。しかし、同時ペル方程式の解の個数の評価があまりよいものは知られていなかった。 $x^2 - az^2 = y^2 - bz^2 = 1$ のタイプの方程式の正の解の個数が3個以下だとBennettの仕事がブレイク・スルーであったが、証明が難しく、改良や一般化が困難であった。本研究者が鍵になる間隙原理の証明を簡単にする連続的な方法を発見したが、Bennettの結果の改良には至っていなかった。Yuanが新しい間隙原理を見つけたため、研究の進展に希望が見えてきていた。

CM-体の類群の研究については、p-rankの大きい拡大の族が尾崎らによって作られていて、岸がScholzの鏡映原理を精密にしていた。複数のCM-体のイデアル類群を調べるための基礎になる研究であり、類数1問題にも応用がある。

一方、類数の小さいCM-体の研究では、部分体を持つCM-体が困難な部分である。包含関係を持つCM-体の相対類数の整除性については、CM-体 k がCM-体 K に含まれるとき、 k の相対類数が K の相対類数の4倍を割り切るという一般化された堀江の整除性が本研究者が示していて、部分体を持つCM-体の類数問題の大きなとっかかりになったが、一般化された堀江の整除性の精密化はなかなか進んでいなかった。

そのため、単数の分かりやすい総実代数的数体やCM-体を計算機で調べること、相対類数の大きいCM-体を計算機で調べる必要などがようになっていた

2. 研究の目的

不定符号の一般化された同時ペル方程式の整数解の個数の精密な評価を発見し、2次体などの生成元が系統的に記述される体に詳しい研究者と協力して、総実な代数的数体、CM-体のイデアル類群の研究を進展させる。

また、次数の高いCM-体で最大総実部分体のイデアル群とCM-体の相対類群の構造を実際的に分離できるものを見つける。CM-体の類数問題でkernelの方法とcokernelの方法があるが、その役割を理解する助けとなる。

Scholzの鏡映の高次のCM-体への影響を調べ、拡大体の構成法や相対類群の構造を理解する。

単数、イデアル類群が分かる総実代数的数体やCM-体の族を見つける。

以上を通して、堀江の整除性の背後にある構造を理解する。

3. 研究の方法

計算機を用いて、線形漸化式を満たす数列を調べて、合同式の意味の周期性を詳しく調べ、不定符号の一般化された同時ペル方程式に通用する間隙原理を発見する。同時ペル方程式の場合のYuanの間隙原理の一般化であるが、Yuanの方法が全く通用しない方程式のパラメーターが見つかったため、様々なパラメーターの値について、数値実験を行い、そのような同定する。不定符号の一般化された同時ペル方程式に関連する連続量の幾何的/解析的構造を調べるため、数式処理システムをはじめとするソフトを用いて、連続量のグラフの様子を観察する。この方法は3次のThue方程式の研究で成功し、4次のThue方程式でも効果を発揮している。

代数的数体で類数の小さいものや、単数の分かるものを数論ソフトを用いて探して研究する。代数的数体のみならず、単数群やイデアル類群に作用するガロワ・モジュールの構造についても数値実験を行う。そのため、数論ソフトと市販の数式処理システムを併用する。

不定方程式の分野の研究者、具体的に与えられた数体の研究者は共に国内に広く分散している。また、岩沢理論の研究者と刺激し合うことがCM-体の研究に必須であるが、岩沢理論の研究者は関西以外の地方や東京に多く、関西には少ない。そのため、研究の進捗を様々な場所で発表し、関連する研究者と刺激しあう。

具体的に与えられた数体の研究については、類体論の理論に近い部分の研究は日本が中心であり、岩沢理論も日本がかなり強いが、計算機アルゴリズムの研究はヨーロッパが進んでいる。不定方程式については、ヨー

ロッパ、ロシアとインドが世界の研究の中心である。そのため、国際学会で発表して、関連する研究者と刺激し合う必要がある。

4. 研究成果

同時ペル方程式 $x^2 - az^2 = y^2 - bz^2 = 1$ の正の整数解の個数が 2 個以下だという定理を証明し、雑誌論文として発表した。また、より一般的で、代数的数体との関係の深い不定符号の一般化された同時ペル方程式 $|a_1x^2 - az^2| = |b_1y^2 - bz^2| = 4$, (a_1, a, b_1, b : 正のパラメーター, x, y, z : 未知整数) を研究し、非負整数解の個数が 3 個になるパラメーターの族を発見した。また、散発的に非負整数解の個数が 3 個になることがある。 $\max\{a_1, a, b_1, b\}$ がある定数以上で、パラメーターが上記の類に属しない場合に、非負整数解の個数が 2 個以下になることを証明できる見通しがついた。Yuan の p -進的な間隙原理の一般化と連続的方法による間隙原理に補助的な間隙原理を組み合わせることによってこの目的を達成できる。

Yuan の間隙原理の一般化の成功がその中心であり Lithuania の Siauliai や日本大学の研究集会の発表の内容である。その概要を国内では佐賀大学の小さな集会で講演し、中原氏、片山氏にきいてもらった。両氏からの示唆で総実 4 次体の族の類数問題に応用することを目的として始めた研究であり、総実 4 次体の類数問題の研究が今後は両氏の手で進んでいくものと期待している。

導手が 2 の中の円分体の実部文体の類数が常に 1 であるとの Weber の予想がある。Weber のこの予想の研究に単数の大きさの下からの評価が有効である。類体論の計算的側面や不定方程式の研究で培った技術を応用することにより、限定的ではあるがかなり強い評価を導くことができた。 K を該当する体の 1 つとし、その導手を f で表す。 F を K の部分体のうち $[K:F] = 2$ を満たす唯一のものとする。本研究では K の単数 ε の F へのノルムが -1 との条件の下で、 ε の平方の有理数体へのトレースが $f(f/2-1)/4$ 以上であることを示した。この結果を使うと、 K の類数の因子となる素数の候補を 2 の高い巾を法とする合同類に封じ込むことができる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① M. A. Bennett, M. Cipu, M. Mignotte, R. Okazaki, “On the number of solutions of simultaneous Pell equations II”, Acta Arithmeticae 122, (2006) pp. 407-417 査読有

[学会発表] (計 4 件)

- ① 岡崎 龍太郎, “Sizes of relative units of the real abelian number fields of 2-power conductors”, 早稲田大学整数論研究集会 2009, 2009 年 03 月 09 日, 東京都新宿区早稲田大学

- ② 岡崎 龍太郎, “Toward a sharp estimate on the number of solutions to the simultaneous Pell Equations”, Diophantine Analysis and Related Fields 2009, 2009 年 03 月 02 日, 東京都文京区 日本大学理工学部

- ③ 岡崎 龍太郎, “Estimating the number of solutions to the simultaneous Pell Equations of indefinite signature” Number Theory in Saga, 2009 年 01 月 06 日, 佐賀県佐賀市佐賀大学理工学部 数理科学科

- ④ R. Okazaki “On Initial Gap Principle of a Generalized Class of Simultaneous Pell Equations”, International Conference in Number Theory 2008 年 08 月 15 日, Siauliai, Lithuania

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡崎 龍太郎

同志社大学 理工学部 准教授

20268113

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし