

平成 21 年 6 月 12 日現在

研究種目：基盤研究 (C)  
 研究期間：2005～2008  
 課題番号：17540051  
 研究課題名 (和文) USD 列の基礎理論の解明と Macaulay 化に関する川崎理論への応用  
 研究課題名 (英文) Clarifying the basic theory of USD-sequences and their applications to the Kawasaki's theory of Macaulayfications  
 研究代表者  
 山岸 規久道 (YAMAGISHI KIKUMICHI)  
 姫路獨協大学・経済情報学部・教授  
 研究者番号：10200601

研究成果の概要：USD 列の基礎理論を応用することで、極大準素イデアルの Hilbert 係数に関する古典論である Northcott の不等式や  $e_2$  に関する成田の正定値性定理の証明を Sally 加群を用いて簡素化するとともに、これらの定理を FLC 環上に拡張した。また、極大準素 ideal,  $I$ , と自然数  $\alpha$  に対し、随伴次数付き環の概念を拡張して次数付き加群  $G_{-\alpha}(I)$  を定義し、 $\text{equi-}I\text{-invariant}$  の場合、基礎環が Buchsbaum (若しくは quasi-Buchsbaum) であれば、 $G_{-\alpha}(I)$  はすべての  $\alpha > 0$  に対して基礎環と同じ性質を持つこと、 $I$  が極大 ideal の場合には逆も成立すること、などを解明した。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	1,200,000	0	1,200,000
2006年度	700,000	0	700,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,300,000	420,000	3,720,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：USD 列, Macaulay 化, 川崎理論, 拡大随伴次数加群, Buchsbaum 性, FLC 性, Hilbert 係数, Sally 加群

## 1. 研究開始当初の背景

Unconditioned strong  $d$ -sequence (「USD 列」と略称) の概念を導入し、その基本的な性質を後藤四郎先生 (明治大学理工学部) との共同研究「The theory of unconditioned strong  $d$ -sequence and modules of finite local cohomology, preprint, 1985 年」以来、20 年余が経過した。1990 年代に入ってこの分野、すなわち列性質の研究、の重要性が再認識されている。その契機は N. T. Cuong 氏に

よる 1990 年代初めの Macaulay 化の研究に始まる。Cuong 氏は USD 列の遍在性を保証した後、non-Cohen-Macaulay locus の次元が 2 以上の場合に Macaulay 化の構成を試みた。残念ながら、この果敢な挑戦は成功を見るには至らなかったが、その後のこの問題の方向性に多大な影響を与え、1996 年、川崎健氏 (東京都立大学・本研究分担者) によって完全な肯定的解決を得るに至ったのである。川崎氏はこの「川崎理論」とでも称すべき

Macaulay 化の手法を発展させ、1999 年に一般次元の Noether 局所環へ拡張し、2003 年には必ずしも局所環ではない Noether 環に対して Arithmetic Macaulay 化の存在を決定する条件を完全に解明したのである。その他の動向としては、研究代表者と蔵野和彦氏（東京都立大学）との共同研究「On the Macaulayfication obtained by blow-up whose center is an equi-multiple ideal, J. Algebra 190(1997)」で驚くべきことに USD 列と Tight Closure との密接な関連が明らかとなっている事などもある。

代数幾何学においても重要な研究課題である特異点の改良問題に関連し Blowing-up に用いられる Rees 環や随伴次数環の（環論的）構造を研究することは極めて重要である。しかし、Arithmetic Macaulay 化はもちろんの事、Rees 環の研究でこれまでの主たる研究課題は Cohen-Macaulay 性にあつたと言っても過言ではない。しかし、Cohen-Macaulay 性の自然な拡張が Buchsbaum 性であることを思えば、Rees 環の Buchsbaum 性を研究することは大変重要なテーマである。そうした意味で、1985 年の J. Stuckrad の研究、Parameter ideal のなす Rees 環が Buchsbaum であることを示した研究の後、Rees 環の Buchsbaum 性に関する研究で特筆すべき進展は極めて数少なく 1999 年の後藤四郎氏（明治大学理工学部）の Minimal multiplicity をもつ極大準素 ideal の成す Rees 環（及び随伴次数付環）に関する epoch-making な研究があるのみである。

こうした状況を踏まえて、USD 列などの列性質に関する基礎理論を確立し、随伴次数付き環や Rees 環など Blowing-up 代数の環構造を解明し、以て、Macaulay 化に関する川崎理論への応用を促すことが、特異点改良問題の研究に更なる発展をもたらすものであるとの認識を得、掛かる研究課題への取り組みが期待されていた。

## 2. 研究の目的

1998 年から 2002 年に掛けて川崎健氏（首都大学東京・本研究分担者）によって確立された「川崎理論」と称すべき (Arithmetic) Macaulay 化の構成法における革新的な部分は、第一に P-standard 列という非常に良い列性質を持った列を選び出してこの列から単純かつ明快な方法で Macaulay 化を与える ideal を創出した点と、第二にこの ideal のなす Rees 環の環構造を詳細に解析する手法を確立した点にある。P-standard 列が USD 列

と極めて近い列性質である事から、USD 列の基礎理論を適宜応用する事で Macaulay 化に関する「川崎理論」の更なる一般化が期待できる。本共同研究は、こうした観点を踏まえて、USD 列の基礎理論の更なる解明を図ること、Macaulay 化に関する「川崎理論」への応用とその新たなる展開を探ることを目指す。これらに関連する課題は多いが、本共同研究で取り組む研究課題は次の通りである。

(1) P-standard 列のような良い列が何故存在し得るのかという疑問に答える事。即ち、それは同時に USD 列の遍在性を担保するものであり、従って、その重要性は論を待たない。まだ十分に解明されていないことが多く、勿論、双対化複体や Cousin 複体など（より正確には、その Cohomology 加群の Annihilator 達）が重要な役割を果たしているのであるが、この種の議論が他の適当な複体であれば可能か否かは未だ判明していない。

(2) 川崎理論では大変に巧妙な過程を経て構成される非常に特殊な ideal についてはあるが、その Rees 環の環構造、特に local cohomology 加群、を完全に決定することができる。この手法は更に一般化が可能であると期待されるし、そのことが Rees 環や随伴次数付き環などの環構造（特に local cohomology 加群）の解明に進展をもたらすと思われる。

(3) 基礎環が Buchsbaum であるとき、(equi-I-invariant など適当な前提の下で) 随伴次数付環や Rees 環なども Buchsbaum 環になることはすでに本研究代表者が証明した。これらの成果は現状では大変満足すべき水準のものであるが、しかし、他の次数付き環の場合はどうなるのか、基礎環が Buchsbaum である若しくは equi-I-invariant であるなどの前提条件はどの程度不可欠なものであるかなどについての精査は充分でない。

(4) USD 列の基礎理論は FLC 環の環構造と密接に関連している。従って、USD 列の基礎理論を応用すれば、FLC 環の環構造、例えば Hilbert 係数などの役割をより鮮明に解明できるものと期待される。

本共同研究は、以上の研究課題に取り組み、以て、列性質の研究の発展に寄与することを目的とする。

## 3. 研究の方法

本研究代表者は本研究課題に関しこれまで次の 2 件 [1] [2] の研究を行っている。

[1]: 平成 10 年度～平成 11 年度、基盤研究 (C) (2)・研究課題番号 10640050、研究

課題名「USD 列の基礎的研究と特異点改良問題への応用」；

[2]：平成 12 年度～平成 15 年度，基盤研究(C) (1)・研究課題番号 12640051，研究課題名「USD 列の基礎理論の構築と Rees 環の環構造の解明に関する研究」。

これまでの研究では，ideal は paramater 系をなす USD 列で生成される場合が考察の対象であったが，[1][2]では極大準素 ideal へと研究対象が広がっている。勿論，ただ漫然と一般論を展開してみても有益な成果を得るとはとても期待できそうになく，従って，適当な USD 列が ideal の filtration に作用しているとの状況下で研究を進めた。これは方法論としても至極妥当である。

本共同研究は，研究期間を 4 年間として，研究テーマを次のいくつかの段階に分けてまずは基礎的な成果を納めることを目標とする。

(1) Macaulay 化に関する川崎理論の中で重要な概念である P-standard 列との関係の解明を中心課題に据えて，USD 列の基礎理論を解明すること。

(2) Macaulay 化に関する川崎理論の中で，P-standard 列から創出された ideal を念頭に置きながら，それに付随する Rees 環，随伴次数付き環などの環論的な構造を解明すること。特に，それらの局所 cohomology 加群を簡便かつ実的に求める方法を開発すること。そして，特に，それらの次数付き環が Buchsbaum 環となる為の判定条件を求め，また，そのための実用的な手法を確立すること。

(3) Macaulay 化に関する川崎理論の中で，双対複体や Cousin 複体及びそれらの cohomology 加群の annihilator などが果たす役割を徹底的に解明し，そして，川崎理論の一層の進化を図ること。特に，川崎理論は他の有限複体に対しても何らかの事が成立するのか否かを解析すること。上述のテーマを考える際，Rees 環のような特別な次数付き環では，これまでにない新しい考え方に基づいた計算方法が必要になると思われる。そうした観点から，次数付き環の一般論よりは，Rees 環のような限定された次数付き環に関するホモロジー代数を構築することが肝要ではないかと思われる。また，何か組み合わせ論的な手法を取り入れることも視野に入れると考えている。

(4) 川崎理論の Macaulay 化の構成法を詳しく吟味し，特異点改良問題において次の目標となる Gorenstein 化に関してこれらの新理論への展望を探ること。

本研究課題の遂行のため，研究分担者とし

て川崎健氏（東京都立大学大学院・理学研究科・助手）を招聘した。氏は，すでに上述 2 件の研究[1][2]において研究分担者としての実績もあり，何よりも Macaulay 化に関する研究者として世界的に見て第一人者の研究者であるため，本研究課題の研究分担者として最適任の人物である。氏に研究分担者を受けて頂いたことは本共同研究プロジェクトにとっても本研究代表者にとって大きな助けとなったのである。

この共同研究を遂行する上で重大な障害は，研究代表者の本務校が「兵庫県姫路市」という地方都市にあるということである。そのため，最新の研究情報は入手し難く，また，東京近辺に本務校がある研究分担者とも地理的に約 600km 以上も離れていて研究連絡も思うようにできない。従って，情報収集のための環境整備を可能な限り行うことと，研究打ち合わせの機会は可能な限り多く取ることを心掛けた。

#### 4. 研究成果

Buchsbaum 環論で極大準素イデアルが果たす役割を探るため，一般論を構築する前の準備段階の作業として，その Hilbert 係数の挙動を調査すると言う新たな研究課題に挑戦した。極大準素イデアルの Hilbert 係数に関する研究は，これまで Cohen-Macaulay 環について多くの先行研究がある。Northcott の不等式(1960 年)や成田の正定値性定理(1963 年)はよく知られた古典論である。近年，この古典的な結果を Buchsbaum 環に拡張する事が試みられていて，少しずつ成果が挙がって来ている。まず，Northcott の不等式の一般化は後藤四郎氏と西田康二氏(2003 年)によりなされ，次いで，A. Corso 氏により Sally 加群を用いた理論が展開されるとともに FLC 環への拡張が試みられた。ただ，Corso 氏の議論には不正確な点が多くて試みは不完全なままに終わっていた。そこで，我々はこの議論を正確に展開することを試み満足すべき成果を得た。これまでの研究で明らかとなった点は，Sally 加群は Hilbert 係数の間に成立する関係を極めて合理的に説明できる加群であると言う点である。従って，列性質の解明においてももっと深い影響をもたらすものとの心証を得た。次に，我々は  $e_2$  に関する成田の正定値性定理を FLC 環上に一般化することを試みた。先ず，基礎環が 2 次元の場合を扱い，次にそれを一般次元に拡張した。これらの成果は第 27 回可換環論シンポジウムにおいて，演題「On Sally modules of

m-primary ideals in Buchsbaum rings」の中で発表した。しかし、これまでの研究成果を論文にまとめ学術雑誌に発表するべく準備を進めているが、 $e_3$ 以降の Hilbert 係数に関してその役割が殆ど解明されていないため、その課題に鋭意取り組んでいる所である。【学会発表①を参照】

次に、極大準素 ideal に付随する Rees 環や随伴次数付き環などの Blowing-up 代数の環構造の解明については、これまでは主に Blowing-up 代数がいつ Buchsbaum 性を持つのかと言う問題の研究が行われ満足できる成果を得ていたが（上述「3. 研究の方法」の中の[1][2]を参照）、その後更にこれらの成果を拡張することは難しくこの方向の研究は停滞してしまったように思える。そこで、本共同研究ではこの逆方向について取り組むこととした。即ち、Blowing-up 代数が Buchsbaum 性（或いは quasi-Buchsbaum 性など）を持つとき、基礎環自身の環構造にどの程度までこの性質が影響を与えるのか、を考察したのである。そのため、まず、随伴次数付き環の概念を拡張して拡大随伴次数付き加群と称すべき新しい加群を準備した。即ち、今、 $I$  を極大準素 ideal とするとき、自然数  $\alpha$  に対し、 $I^{n+1}/I^{n+\alpha}$  を  $n$  次の斉次成分とする次数付き加群を  $G_{\alpha}^n(I)$  とおく。equi-I-invariant の場合、基礎環が Buchsbaum (或いは quasi-Buchsbaum) であれば、 $G_{\alpha}^n(I)$  はすべての  $\alpha > 0$  に対して基礎環と同じ性質を持つことをまず証明した。次に、この事実の逆が成立するのではないかと予想を立て、 $I$  が極大 ideal の場合にそれを証明した。即ち、 $m$  を極大 ideal とすると、Equi-I-invariant の場合、もしすべての  $\alpha > 0$  に対して  $G_{\alpha}^n(m)$  が Buchsbaum ならば、基礎環も Buchsbaum なのである。逆方向の問題は代数的であるにも関わらず極めて位相的側面も併せ持つ事を示すものであり、興味深い。これらの成果は The 3rd Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, Hanoi, December 3 - 7, 2007 において、演題「Buchsbaumness of graded modules associated to m-primary ideals in the equi-I-invariant case」の中で発表した。この拡大次数加群  $G_{\alpha}^n(I)$  に関する研究成果は、論文「Buchsbaumness of certain generalization of the associated graded modules in the equi-I-invariant case」にまとめ、学術雑誌 Journal of Algebra へ平成 21 年 2 月に投稿した。掲載の可否は平成 21 年 6 月現在でまだ審査中である。【学

会発表②を参照】

川崎健氏（研究分担者）は、Cousin 複体の cohomology 加群の有限生成性に関する深い結果を得た。2001 年に M. T. Dibaei 氏と M. Tousei 氏は Cousin 複体の cohomology 加群の有限生成性を基礎環が等次元な局所環で双対化複体を持ち ( $S_2$ ) 条件を満たしているときに証明したが、川崎氏はこの結果を Noether 環上に拡張した。即ち、4 条件 (C1), (C2), (C3), (QU) を与え、これらを満たすならば Cousin 複体の cohomology 加群はすべて有限生成であることと高々有限個を除いて (0) となることを証明した。この成果の著しい応用として、氏が 2002 年に確立した局所環に対する算術的 Macaulay 化の存在性定理を、局所環に対するものから一般の Noether 環に対するものへと拡張できた。【論文①参照】次に、基礎環が局所環で双対化複体を持つか正則局所環の準同型像であれば零化域定理が成立することを、1978 年に G. Faltings 氏が示しているが、川崎氏はこの定理の拡張を試み、前述の条件 (C1), (C2), (C3) を満たすならば一般の Noether 環に対して零化域定理が成立することを証明した。そして、この拡張された定理を応用して、1992 年に C. Huneke 氏が提起した Uniform bound に関する予想を解決した。【論文②参照】

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① 川崎健,  
Finiteness of Cousin cohomologies,  
Trans. Amer. Math. Soc.,  
vol. 360 (2008), no. 5,  
pp. 2709--2739.
- ② 川崎健,  
On Faltings' annihilator theorem,  
Proc. Amer. Math. Soc.,  
vol. 136 (2008), no. 4,  
pp. 1205-1211.

[学会発表] (計 6 件)

- ① 山岸規久道,  
On Sally modules of m-primary ideals  
In Buchsbaum rings,  
第 27 回可換環論シンポジウム,  
2005 年 11 月 16 日,  
インテック大山研修センター,  
同報告集 pp. 112-116.

- ② 山岸規久道,  
 Buchsbaumness of graded modules  
 associated to  $m$ -primary ideals in the  
 equi-I-invariant case,  
 The 3<sup>rd</sup> Japan-Vietnam Joint Seminar on  
 Commutative Algebra,  
 2007年12月3日  
 Institute of Mathematics, Vietnamese  
 Academy of Science and Technology,  
 Hanoi, Vietnam,  
 同報告集 pp. 38-51.
- ③ 川崎健,  
 On Faltings' annihilator theorem,  
 第27回可換環論シンポジウム,  
 2005年11月15日,  
 インテック大山研修センター(富山市),  
 同報告集 pp. 26-30.
- ④ 川崎健,  
 Faltingsの零化域定理について,  
 第18回可換環論セミナー,  
 2006年1月31日  
 北海道立道民活動センター かでの2・7  
 (札幌市),  
 同報告集 pp. 14-20.
- ⑤ 川崎健,  
 On Faltings' annihilator Theorem,  
 The 2nd Japan-Vietnam Joint Seminar on  
 Commutative Algebra,  
 2006年3月24日  
 明治大学生田校舎(川崎市)  
 同報告集 pp. 169-174.
- ⑥ 川崎健,  
 The Annihilator Theorem of Faltings  
 with uniform property in the sense  
 of Raghavan,  
 Commutative Algebra and its  
 Interactions with Algebraic Geometry  
 (Luminy/France)  
 2006年5月25日  
 Centre International de Rencontres  
 Mathématiques case 916, 163 avenue  
 de Luminy, 13288 Marseille cedex 09  
 France,  
 報告集なし.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山岸 規久道 (YAMAGISHI KIKUMICHI)

姫路獨協大学・経済情報学部・教授

研究者番号: 10200601

(2) 研究分担者

川崎 健 (KAWASAKI TAKESHI)

首都大学東京・都市教養学部・助手

研究者番号: 40301410

(3) 連携研究者

なし