

平成21年 5月15日現在

研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2005～2008
 課題番号：17540060
 研究課題名（和文） 全曲率による多面体の構造に関する研究
 研究課題名（英文） Research on the structure of polyhedra from the viewpoint of total curvature
 研究代表者
 大塚 富美子（OHTSUKA FUMIKO）
 茨城大学・理学部・准教授
 研究者番号：90194208

研究成果の概要：

2次元非コンパクトな piecewise Riemannian polyhedron 上に全曲率を定義し、その定義の下での Cohn-Vossen 型の定理（全曲率の上からの評価）について研究を行った。実際には、強い意味と弱い意味での2種類の定義を与え、上記の定理は強い意味の曲率のもとで成立し、弱い意味の曲率のもとでは成立しないことを示した。更に、定曲率多面体の分類を研究するための手始めとして、平坦性を定義し、平坦な多面体を分類した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	800,000	0	800,000
2006年度	700,000	0	700,000
2007年度	900,000	270,000	1,170,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,300,000	540,000	3,840,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：多面体・全曲率・定曲率

1. 研究開始当初の背景

滑らかな曲面上には、各点毎に曲面の曲がり方を表す曲率が定まっている。これを曲面上で積分したものを全曲率と言い、曲面の大

域的性質を特徴づける量となっている。リーマン計量から定まる全曲率と位相不変量であるオイラー標数との関係を表す Gauss-Bonnet の定理は、非常に有名であり、

古典的定理の観さえあるが、この定理の拡張に関しては、高次元化や、特異点を含む空間あるいは離散的空間への拡張など様々な研究があり、現在も活発な研究がなされている。特に、Banchoff による一般次元の piecewise linear な有限複体のなす多面体への Gauss-Bonnet の定理の拡張は、その後の研究に対して示唆に富むものとなっている。しかし、この対象は有限複体、即ちコンパクトな多面体となっており、非コンパクトな多面体に関する研究は、今後の展開が待たれる研究領域である。

一般に、コンパクトな空間の全曲率はオイラー標数のスカラー倍となり、その位相構造にしか関与しないが、非コンパクトな空間では、オイラー標数だけでなく無限遠における広がり方(理想境界の大きさ)を表している。本研究では、研究の対象を piecewise Riemannian polyhedron (リーマン多様体上の測地三辺形を張り合わせてできる局所有限な複体の構造を持つ完備な多面体)と定め、特に非コンパクトな場合について、その性質を調べて行くことを目的としている。

既に、連携研究者である伊藤仁一氏との共同研究により、2次元非コンパクトな piecewise Riemannian polyhedron 上に全曲率を定義し、Cohn-Vossen 型の定理(全曲率の上からの評価)を示すことができおり、この成果を発表しつつ、それを基にして、さらに研究を発展させ、例えば定曲率多面体の分類などを目指す状況であった。

2. 研究の目的

幾何学分野においては、多様体に限らずアレキサンドロフ空間などのより一般的な空間を対象とした研究が盛んとなっている。本研究でも、研究対象を2次元の piecewise Riemannian polyhedron (リーマン多様体上の三辺形を張り合わせてできる局所有限な複体の構造を持つ完備な多面体)という曲面を一般化した空間として設定し、前項「研究開始当初の背景」でも述べたように、この空間を曲率(特に全曲率)の見地から特徴付けることを目的としている。

3. 研究の方法

本研究の特色は、「多面体」を研究対象とし、リーマン幾何学の手法を用いて研究を行っていることである。最近では、具体的応用の見地から、離散化した空間(グラフや多面体など)上への幾何学的・解析学的概念の拡張も盛んであり、様々な研究がなされている。コンピューターによる解析などが一般的に行われる現代社会では、対象を離散化して近似して捉えることにより、様々な研究・調査がなされている。その中であって、グラフや多面体などの研究は、それ自体重要なことになってきている。このような研究においては、グラフをユークリッド空間などに埋め込んで研究する手法もあるが、私は、離散化された空間の特徴は、本質的にその空間上の演算によるのみ(他の空間への埋め込み方によらず)決定されるべきであると思う。それこそが、応用の可能性のあるものになると思われる。また、本研究は研究対象の特質から、組み合わせ理論的な手法なども駆使されるものとなっている。

このような状況に鑑み、広く知識を求め、研究会やセミナーに出席し、様々な分野の研究者との交流を深めることが重要である。研究の方法は、本研究が純粋理論的研究であることから、じっくりと考察を深め、例を構成したり検証しながらアイデアを精選し実体化させていくことであるが、そのためにも、連携研究者をはじめとする研究者との研究打ち合わせが重要である。その交流の中で、本研究にも関連のある面白い問題に出会うこともあり、それらについても検証して行く。

4. 研究成果

(1) 2005年度の成果

研究代表者：大塚富美子 と 連携研究者：伊藤仁一による共著の論文“Total curvature of noncompact piecewise Riemannian 2-polyhedra”では、研究対象の多面体上に2種類の全曲率を定義し、強い意味での全曲率のもとではCohn-Vossenの定理の拡張が成立することを示すとともに、一般の曲面との違いについても述べている。更に、等周問題に関する結果が拡張されることも示している。

また、Erratum to: “Structure of flat piecewise Riemannian 2-polyhedra”では、平坦な多面体を定義し、平坦な多面体はある木(tree)と1次元ユークリッド

空間 R との直積であることを示した。

更に、伊藤氏による polyhedral surface に関する考察など、いくつかの関連する結果も得られている。

(2) 2006 年度の成果

2次元多面体の面の分岐を調べるには、各頂点におけるリンクを見ればよい。リンクは1次元の複体であり、グラフの研究が大いに役に立つ。連携研究者：伊藤仁一氏による論文“Tightness of Graphs : Realizations with the two-piece-property”はグラフに関するものであり、頂点のリンクの研究にも役立つ可能性がある。また“Tetrahedra passing through a circular or square hole”は正四面体に関する論文、“On the length of simple closed quasigeodesics on convex surfaces”は凸曲面に関する論文である。少しテーマは異なるものであるが、それぞれ本研究の研究対象にも関連する対象に関する結果となっている。

連携研究者：大嶋秀明氏による論文

“Homotopy classes of self-maps and induced homomorphisms of homotopy groups”は位相不変量であるホモトピー群に関するものであり、多面体の位相構造の研究への利用が期待できる。

(3) 2007 年度の成果

連携研究者：伊藤仁一氏による論文

“Acute triangulations of the regular dodecahedral surface”は正12面体に関するものであり、本研究の研究対象に関わるものである。また、多面体の位相構造を調べるためには測地線の最小軌跡やホモトピー群の研究は有効であり、“Cut loci and distance functions”は測地線の最小軌跡に関する論文であり、これも本研究の研究対象に関連するものとなっている。

(4) 2008 年度の成果

連携研究者：大嶋秀明氏による論文“A quotient group of the group of self homotopy equivalences of $S^0(4)$ ”はホモトピー群に関する論文であり、連携研究者：伊藤仁一氏による論文“Acute triangulations of flat tori”は、鋭角三角形による平坦トーラスの三角形分割に関するものである。ともに本研究の研究対象に関連するものとなっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文] (計13件)

1. J. Itoh and L. Yuan, Acute triangulations of flat tori, European J. Combin., 30, 1-4, 2009, 査読有り
2. H. Oshima, A quotient group of the group of self homotopy equivalences of $S^0(4)$, Kodai Mathematical Journal, 31, 82-91, 2008, 査読有り
3. J. Itoh & T. Zamfirescu, Acute triangulations of the regular dodecahedral surface, European J. of Combinatorics, 28, 1072-1082, 2007, 査読有り
4. J. Itoh & T. Sakai, Cut loci and distance functions, Math. J. Okayama Univ., 49, 65-92, 2007, 査読有り
5. M. Arkowitz, H. Oshima and J. Strom, Homotopy classes of self-maps and induced homomorphisms of homotopy groups, J. Math. Soc. Japan, 58, 401 - 418, 2006, 査読有り
6. J. Itoh and W. K \ddot{u} hnel, Tightness of Graphs : Realizations with the two-piece-property, Review Roumaine Mathematique Pures et Appliques, 51, 1 - 19, 2006, 査読有り
7. J. Itoh, Y. Tanoue and, T. Zamfirescu, Tetrahedra passing through a circular or square hole, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 77, 349-354, 2006, 査読有り
8. J. Itoh and C. V \ddot{u} lcu, On the length of simple closed quasigeodesics on convex surfaces, Comptes Rendus Math., 343, 259-264, 2006, 査読有り
9. J. Itoh and F. Ohtsuka, Total curvature of noncompact piecewise Riemannian 2-polyhedra, Tsukuba J. Math., 29, 471 - 493, 2005, 査読有り
10. F. Ohtsuka, Erratum to: “Structure of flat piecewise Riemannian 2-polyhedra”, Math. J. Ibaraki Univ., 37, 107-114, 2005, 査読有り
11. J. Itoh and T. Zamfirescu, On the length of the cut locus for finitely many points, Advanced Geometry, 5, 97 - 106, 2005, 査読有り
12. J. Itoh, Gauss-type curvatures and tubes for polyhedral surfaces, Kumamoto J. Math., 18, 51 - 56, 2005, 査読有り
13. J. Itoh and T. Zamfirescu, Simplicies passing through a hole, J. of Geometry, 83, 65 - 70, 2005, 査読

有り

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大塚 富美子 (OHTSUKA FUMIKO)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：90194208

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

伊藤 仁一 (ITO JIN-ICHI)
熊本大学・教育学部・教授
研究者番号：20193493

大嶋 秀明 (OSHIMA HIDEAKI)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：70047372