様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年５月２２日現在

研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００５～２００８
課題番号：17540063
研究課題名（和文）　４次元微分位相幾何への Ricci Flow の応用

研究課題名（英文）Applications of the Ricci flow to 4-dimentional differential topolog

研究代表者
久我　健一（KUGA KENICHI）
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30186374

研究成果の概要：リッチ流の４次元での挙動が不安定であることの経験が得られたが、現時点で４次元における特異点生成のモデルは得られていない。しかし、リッチ流が収束するジェネリックな構造である双曲構造と関連して、１－３価グラフから得られるある線形空間の次元を評価する公式や、双曲構造と数論との関連、また４次元中の曲面結び目のある種の彩色数に関する結果が得られている。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００５年度	1,000,000	0	1,000,000
２００６年度	800,000	0	800,000
２００７年度	800,000	240,000	1,040,000
２００８年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総　計	3,200,000	420,000	3,620,000

研究分野：位相幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：低次元微分位相幾何学

１．研究開始当初の背景

多様体の微分位相幾何学は、高次元すなわち５次元以上の多様体の研究については、スメールによる一般ポアンカレ予想の証明や手術理論の発展によって１９６０年代から７０年代にかけて大きな進展をみたが、そこに用いられていた交叉解消のテクニックが４次元以下では使用できないために、４次元と３次元の多様体の研究は別の道をとらなければならなかった。４次元多様体については基本群に適当な制限をつければ、位相的カテゴリーにおいて高次元のテクニックが使用可能であることがフリードマンによって８１年に示され、特に４次元ポアンカレ予想が位相的カテゴリーで証明されたが、同時にドナルドソンによって、４次元において異なる可微分構造をもつ多様体の存在が多数明らかになった。したがって、可微分カテゴリーにおける４次元ポアンカレ予想、すなわち４次元ホモトピー球面上の可微分構造は標準的なものに限るか？という問題が基本的な未解決問題として残っていた。

一方、３次元多様体論においてもポアンカレ予想は長らく未解決であったが、ハミルトンのリッチ流の時間的発展の詳しい研究の結果、ペレルマンによって３次元ポアンカレ予想の証明が２００３年ごろ得られた。この

解決は単にポアンカレ予想に留まらず、サーストンによる３次元多様体の幾何化予想を解決し、３次元多様体全体に決定的な結果をもたらした。

ハミルトンのリッチ流は、３次元と４次元のみにおいて有効であることが指摘されており、４次元多様体においても、３次元と同様に位相的結果を導く可能性がある。実際ハミルトン自身によって初期計量が適当な正値性の仮定をみたせば、標準計量に収束することが示されており、とくにこのような４次元多様体は４次元球面と微分同相になることが従う。したがって、この初期計量に関する仮定が取り除ければ、４次元におけるポアンカレ予想が微分可能カテゴリーで成　立することになる。また、このような結果は、４次元多様体論全体においても大きな意味をもつことになる。

しかし、４次元におけるリッチ流の研究は上記のハミルトン自身によるものを除いてほとんど行われていない状況である。これは、低次元位相幾何におけるリッチ流の有効性が、ペレルマンによるポアンカレ予想の解決以前には、一部の幾何学の専門家しか認識していなかったことと、３次元において決定的なハミルトン・アイビーの補題が、４次元で成立しないため、３次元における結果が４次元に拡張できないことなどによる。

２．研究の目的

上述のように R. ハミルトンや G. ペレルマン等によって リッチ流が ３次元多様体において強力な研究手段であることが近年とくに明らかになってきた。そこで、この研究の基本的な目的は４次元多様体に対して、とくに微分可能なカテゴリーにおいて、リッチ流のテクニックが、どのくらい使えるものであるのかを調べ、４次元微分位相幾何の諸問題への応用の可能性を探ることにある。

しかし、３次元において有効なハミルトン・アイビーの補題が４次元では成立しないことは、少なくとも、４次元における特異点生成の研究の見通しを困難にしている。実際、すくなくとも概念的レベルでは４次元リッチ流が初期計量に関して不安点に崩壊することがわかる。これは例えば３次元における連結和の一意性が４次元では成立しないことからも予期される。すなわち４次元では３次元以下に比べて、不安定な崩壊が起こり、Perelman のようなアプローチがそのままの形で成り立つ見込みはない。

そこで、建設的立場から逆に考える。すなわち、崩壊はむしろファイブレーションを意味し、幾何構造が支配する３次元に比べて、４次元はファイブレーションが支配する　のではないかという、一般的指針を掲げることができる。この指針自体は、幾何構造が支配する３次元に対する４次元の特徴を正しくとらえている可能性がある。実際、近年の研究により、かなり多くの４次元多様体にレフシェッツファイブレーションなどの構造が入ることが明らかになってきていることと、上記のとおり、連結和の一意性も４次元では成り立たないので、幾何化予想のような一意化は４次元では指針となりえないと考えられるからである。しかし、リッチ流を全くコントロールせずにファイブレーションに崩壊することも期待できないので、むしろこの一般的指針の 正確な意味を確立すること が４次元多 様体の可微分カテゴリーでの研究における大きな目標と考えられる。この意味でも４次元における特異点の生成の理解が重要となるが、ハミルトン・アイビーの補題の何らかの類似が４次元で成立する可能性が少ないという現状考えて、より現実的には、どのような特異点が生成されるのかという見通しや経験の蓄積が目標となる。

一般的な４次元多様体ではなく、範囲をより限定し、ホモトピー４次元球面に限って、その可微分構造を研究することも大きな目標である。すなわち、４次元球面上の可微分構造の一意性は証明されていない。これは可微分カテゴリーに おける４次元ポアンカレ予想で、全次元を通じて、唯一残された未解決ケースである。もちろんこの肯定的解決を目指すのは期待できることでないし、そもそも４次元球面における可微分構造の一意性が成立すると期待できる理由も全くない が、ハミルトンによって 曲率作用素が正の計量を初期計量とすれば、リッチ流が計量を標準計量にもっていき、可微分構造は標準的であることが示されている。したがって、何らかの仮定のもとに ４次元ホモトピー球面上に与えられた正の対称２テンソルを Ricci 曲率にもつ計量を構成することは大きな意味がある。

以上述 べたことはいずれも大きな問題であって、ペレルマンの結果に乗じて解決できれば素晴らしいというものであるが、これが解決できると考えるのは楽観的にすぎる。そこで、より基本的な点を述べておく必要がある。４次元全般にいえることは３次元多様体よりも位相的自由度が大きいということである。このことが特異点の生成の理解を困難にし、崩壊を不安定にしている。したがって、より基本的な目標として、このような位相構造の地道な理解を進めることが挙げられる。すなわち、４次元におけるファイブレーションの双対として２次元球面結び目の理解や、そもそも３次元におけるジェネリックな幾何構造としての双曲構造の理解、関連して双曲体積と位相的場理論の関係などの地道な理解を通じて、４次元におけるリッチ流の

応用可能性を探っていくことがより基本的な目的といえる。

３．研究の方法

研究の目的で述べたとおり、当該研究は４次元ポアンカレ予想を含む大きな目標を立てているが、このような目標に対して確立されたアプローチは存在しない。そこで可能性があるいくつかのアプローチを進めるとともに、低次元多様体のより基本的な理解のために地道な研究方法を採用する必要がある。

そこで大きな２つの課題に対する研究方法を述べるとともに基礎的研究についても述べる。第一の課題は４次元球面上の可微分構造の研究に対するものであり、第二は４次元多様体の Riemann 計量の Ricci flow による崩壊とファイバー構造の理解に関するものである。また基礎的研究は、ファイブレーションの双対、また初期計量をあたえる具体的方法としての球面結び目と、ジェネリックな幾何構造としての双曲構造と、位相的場の理論等との関連に関する基礎的理解である。

第一の課題については４次元球面上の可微分構造は一意であるという仮説をたて、これをリッチ流を用いて証明することが究極的な目標である。すなわち４次元ホモトピー球面上に Riemann 計量を与え、これをリッチ流で標準的計量にすれば、仮説が立証されることになる。このときに重要であるのは初期計量の構成である。理想的には曲率作用素が正である計量を構成できれば、リッチ流はその計量を標準計量にもっていくことが既に H はミルトンによって証明されている。このような曲率が一定の条件を満たす計量の構成は多くの研究がなされてきている。しかし多くはスカラー曲率に関するもので、よりデリケートなリッチ曲率に関しては局所的構成が主である。例えば、正のリッチ曲率の候補となる対称２次元テンソルを与えたとき、これをリッチ曲率とするような計量の存在は大域的な障害が存在する。局所的な構成はD. DeTurck 等により得られており、また（相似を除いた）一意性もある程度得られている。そこで、このような構成と一意性の結果を調べ、局所的に構成される計量を接続していき、どこに障害があるかを考えることになる。特に４次元ホモトピー球面に限定してこれを大域的に構成するために障害は何であるかを特定することが目標となる。このような障害がホモトピー論的に特定できれば、問題は解決に近づく。

第二の問題に関しては、まず３次元の幾何構造との違いを認識することからはじめる。すなわち４次元と３次元との最大の違いは計量の崩壊が不安定である点である。このことは３次元多様体のようなプライム分解が４次元では成立しないという事実からも裏打ちされる。したがって、まず最初に４次元多様体のファーバー空間への分解に関して微分同相による同値関係を導入し、初期 Riemann 計量のどのような違いが同値なファイバー空間への分解を引き起こすのか、あるいは同値でないファイバー空間への分解を引き起こすのかを調べることから問題の正確な定式化を目標とする

以上の研究に加え、地道な知見を積み上げる必要がある。すなわち、リッチ流が収束するジェネリックな幾何構造としての双曲構造に関する研究も必要である。この場合、３次元における双曲構造の主要な 位置は４次元においては確立していない。これは、前述のように、そもそも４次元においては幾何化、あるいは一意化が成り立たない と考えられることもある。しかし、リッチ流の極限としての双曲構造の重要性は４次元においても変わらないと思われる。４次元に拡張する大きな視点は、双曲構造の代数化、あるいは数論との関連を調べることである。このような抽象化によって双曲構造のより本質的な役割が明瞭になる可能性を探ることができる。双曲構造はまた、体積予想などと関連し、位相的場理論等とも関連している。これについても、ひとつの研究方法は代数化、あるいは組合せ化である。このような視点から４次元にたいしてより広い視野からアプローチする可能性が生まれる。また、より具体的視点としては、ファイブレーションの双対あるいは、初期計量を与える足場としての曲面結び目を観察することも重要である。これは４次元におけるリッチ流の初期計量に関する不安定な挙動を理解するために、初期計量をどのように与えるかという問題と関連している。この部分では全く位相幾何的な構成と観察が主要な方法となる。

４．研究成果

リッチ流の４次元での振舞いの考察を繰り返したが、不安定な挙動に阻まれて特異点の解析への見通しをえることにはまだ成功していない。したがって、崩壊の解析、コントロールや４次元球面上の可微分構造へのリッチ流の応用には至らなかった。結果として現時点でここにのべるものは、低次元多様体のより基礎的理解に関するものである。すなわち、リッチ流が収束するジェネリックな幾何構造としての双曲構造に関するものと、ファイブレーションの双対あるいは、初期計量を与える足場としての曲面結び目、また位相的場理論の組合せ版のある種の公式などがえられた。これらはそれぞれ興味深く、低次元微分位相幾何学の新しい知見といえる。

まず 論文④ ”On some formulas in

combinatorial computation of uni-trivalent graphs" (Hanawa-Kuga)においてはいくつかの単純リー環に対して、１－３価グラフから得られるある線形空間の次元を評価する公式を得ている。またいくつかの場合に具体的な基底を与えている。これは位相的共形場理論の組み合わせ版と思うことができる。このような理論は一方ではコンセヴィッチ不変量と関連し、他方ではチャーン・サイモン位相場理論と関連している。低次元双曲構造はこれらと密接に関連していると考えられる。いわゆる体積予想はその一例であるが、この予想は物理的な議論（経路積分）を認めると成立することが強く示唆される。数学的にこれを正当化する方法のひとつは議論の組み合わせ化であり、この論文の結果はその方向性を向いている。双曲構造が Ricci 流の発展で自然にえられるため、Hamilton-Perelman 理論がこのような議論に関連する可能性が考えられるが、現時点で明確な結果は得られていない。しかし、基本的には組み合わせ化によって、これらの関連する理論のつ ながりが数学的に正当化される可能性を示唆する結果となっている。

論文①"Colorings of torus knots and their twist-spuns by Alexander quandles over finite fields" (Asami-Kuga) では４次元球面中のトーラス曲面結び目に関して Alexander quandle の彩色に関する公式を得ている。前述のように、4 次元における Ricci 流は初期計量に対して不安定に変化するが、4 次元球面中の曲面結び目は、非自明な初期計量を与える方法を与える。そのような初期計量を与えて Ricci 流がどのように変化していくのかは興味ある問題である。基本的には特異点を生成しつつ、（それを除去して続けると）定曲率計量に収束することが期待されるが、どのような特異点が生成されるかが問題の中心のひとつで、その意味でも４次元球面中の曲面結び目に関する このような基本的公式を得ることは意味があると考えられる。

論文②"On geometric analogues of the Birch and Swinerton-Dyer conjecture for low dimentional hyperbolic manifolds" (Sugiyama) は低次元双曲構造に関連して、いわゆるバーチ・スィナートンダイヤー予想の幾何的類似を扱ったものである。Hamilton-Prelman 理論から３次元 Ricci 流は典型的には双曲構造に収束する。従って ３次元双曲構造に関してこのような数論的関連性がみつかることは大きな進展と考えられる。論文③", An analog of the Iwasawa conjecture for a compact hyperbolic threefold"(Sugiyama)においても数論と３次元多様体の類似が追求されている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計5 件）

① Sochiro. Asami and <u>Ken'ichi Kuga</u>, Colorings of torus knots and their twist-spuns by Alexander quandles over finite fields, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, ２００９ ００－００（to appear） 査読有

② <u>Ken-ichi Sugiyama,</u> On geometric analogues of the Birch and Swinerton-Dyer conjecture for low dimentional hyperbolic manifolds Contemporary Math., ２００９ ００－００（to appear）査読有

③<u>Ken-ichi Sugiyama</u>, An analog of the Iwasawa conjecture for a compact hyperbolic threefold, J. Reine. Angew. Math. ６１３, 2007 35--50 査読有

④Kazutaka Hanawa and <u>Ken'ichi Kuga</u>, On some formulas in combinatorial computation of uni-trivalent graphs, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics 37 No.2, 2006 75-88 査読有

⑤ <u>Takashi Inaba</u>, On rigidity of submanifolds tangent to nonintegrable distributions, Proceedings of the International Conference FOLIATIONS 2005, 2006 203-214 査読有

６．研究組織

(1)研究代表者
久 我 健 一
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号30186374

(2)研究分担者
稲 葉 尚 志
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号40125901
杉 山 健 一
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号90206441