様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　6月　8日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2005 ～ 2008
課題番号：17540070
研究課題名（和文）　モデル圏における非安定高次周期性の研究

研究課題名（英文）　On the unstable higher order periodicity in model categories

研究代表者
玉木 大（TAMAKI DAI）
信州大学・理学部・准教授
研究者番号：10252058

研究成果の概要：本研究の主な成果は大きく分けて次の二つである。一つは多重ループ空間のホモロジー群を計算するための主要なスペクトル系列の一つである Eilenberg-Moore スペクトル系列の全く異なるアプローチによる構成を発見し，それにより Eilenberg-Moore スペクトル系列を一般化する新しいスペクトル系列の構成に成功したことである。もう一つは，数理物理学への応用から発見された K 理論の変種である twisted K 理論について，その連結ホモロジー版を新しい視点から構成することに成功したことである。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2005 年度	1,500,000	0	1,500,000
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	500,000	150,000	650,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総　計	3,300,000	300,000	3,600,000

研究分野：ホモトピー論
科研費の分科・細目：数学．幾何学
キーワード：多重ループ空間，超平面配置，Salvetti 複体，K 理論，twisted K 理論，両側 bar 構成

１．研究開始当初の背景

代数的位相幾何学の研究手法の中でも最も基本的なものは，位相あるいはホモトピー不変量による研究である。その中でも重要なものにホモトピー群と(コ)ホモロジー群があるが，後者には懸垂同型という次元をシフトしても変わらないという性質があり，ホモトピー群よりも調べ易い不変量である。

このような次元のシフトによって不変な性質を調べる分野を安定ホモトピー論というが，1990 年代にその安定ホモトピー論において大きな成功を収めた手法として，Hopkins や Ravenel らにより開発された高次周期性による研究がある。これは K 理論が周期性を持ち，その周期性がホモトピー群の周期性として現われることに着目し，高次の K 理論を用いて従来の手法では手の届かなかったホモトピー群の情報を調べる手法である。

一方，同じく 1990 年代には，別の同期から Goodwillie により関手の微分という新たな代数的トポロジーの手法が開発され，これも

高次周期性と関係が深いことが，Arone や Mahowald の研究から分かってきた。

安定ホモトピー論は次元による影響を無視するものであり，その分単純化され代数的な取扱いが容易になるが，反面幾何学的情報を失なうことになる。安定性が成り立たない領域での研究，すなわち非安定ホモトピー論は，幾何学的な問題に近いが，その研究は極めて困難である。

その非安定ホモトピー論においても，1990 年代後半から 2000 年代前半の Gray や Theriault らの研究により，高次周期性の重要性が認識されるようになってきた。ただし，安定ホモトピー論においては，K 理論に関連した周期性はほぼ判明し，より高次の周期性の研究が行なわれているが，非安定ホモトピー論においては，K 理論に関連する周期性でさえまだ不明な点が多い。K 理論の前，有理数係数の常ホモロジーに関する非安定周期性については Cohen-Moore-Neisendorfer による重要な研究があり，特に，周期性を持たない元がどのように分布するかについて詳しく調べられている。

そして，研究代表者の多重ループ空間のホモロジーに関する研究により，これら研究は多重ループ空間の構造と深い関係にあることが分っている。本研究の背景は，これらの研究の関連性を追求することにある。

２．研究の目的

本研究の動機は，１．で述べた背景の下に，非安定ホモトピー論における高次周期性の研究のための新たな手法を開発することだった。その基礎となるのは，Gray による EHP スペクトラムの概念，そして研究代表者による多重ループ空間の小立方体のなすオペラッドによる研究である。

よって，当初の具体的な目的は以下のものだった。

(1) Gray の EHP スペクトラムの研究をより具体化するために，その高次の EHP スペクトラム，あるいはそれに準ずる対象を，関手の微分などの手法を用いて構成する。
(2) 高次周期性を調べるために，高次周期性を持つホモロジー論を，Dold-Thom の無限対称積および Segal の K ホモロジーの構成を一般化することにより，具体的に構成する。
(3) 上記の構成を下に，Cohen-Moore-Neisendorfer による球面の非安定ホモトピー群の有理数係数ホモロジーに関する非周期的な元の構造を，K 理論に関する非周期的な元の研究に拡張し，それらの元の成す部分群の大域的構造を調べる。
(4) Goodwillie の関手の微分はホモトピー極限により定義されているため，以上の位相空間の圏での構成を一般のホモトピー極限を持つモデル圏に拡張できるか調べる。特に，orbifold の圏を含むモデル圏を構成しそれについて調べる。

３．研究の方法

本研究では，まず小立方体の成す空間を詳しく調べた。Gray の研究により，Freudenthal の懸垂写像のホモトピーファイバーの構造が高次非安定周期性の理解のための鍵を握っていると考えられるが，そのホモトピーファイバーは Goodwillie の関手の微分と深い関係にある。またそのホモトピーファイバーの高次 K 理論に収束するスペクトル系列が研究代表者により小立方体の空間にフィルトレーションを入れることにより構成されている。そこで，まずそのフィルトレーションの構造を詳しく解析した。

また K 理論に関する周期性を詳しく調べるための道具として，K 理論の構成を見直し，無限対称積や twisted K 理論を含む構成を開発した。

４．研究成果

まず，小立方体の空間のフィルトレーションの研究による成果として以下のものを得た。

(1) Eilenberg-Moore スペクトル系列の小立方体を用いた構成において，その E^1 項とその第一微分について，具体的な公式を得た。この結果は，論文” On the E^1-term of the gravity spectral sequence”として発表した。その第一微分の公式は，Eilenberg-Moore スペクトル系列の計算自体の他に，ループ空間の間の写像を具体的に構成する際にも用いることができることが，米国ロチェスター大学の Fred Cohen 教授の研究により分かってきた。

(2) n 次元の j 個の小立方体の空間は，n 次元ユークリッド空間 R^n 内の j 個の点の成す配位の空間 $F(R^n, j)$ と j 次対称群の作用も含めてホモトピー同値であることは，よく知られている事実である。一方，n=2 の場合 $F(R^2, j)$ は j 次元複素ユークリッド空間 C^j 内の $z_i=z_k$ で表わされる超平面達の補集合と同一視できる。さらにこの

超平面配置は実超平面配置の複素化として得られるものである。このような複素超平面配置は，多くの研究が成されており，特に基本群ホモトピー型については，Salvetti による有名な研究がある。

そこで，小立方体のフィルトレーションと Salvetti による複素超平面配置のホモトピー型の CW 複体によるモデル (Salvetti 複体) の比較を行なったところ，小立方体のフィルトレーションが，Salvetti 複体の自然な胞体構造によるスケルトンによるフィルトレーションと完全に一致することが分かった。一方は Eilenberg-Moore スペクトル系列の構成を忠実に再現することを目的に構成されたフィルトレーションであり，もう一方は実超平面配置の複素化から得られる組み合せ論的構造 (oriented matroid) から自然に得られるものであり，この二つのフィルトレーションが一致するということは，全く予想だにしなかった結果である。

この結果は，実数を複素化するという性格上 n=2 の場合に限られるが，小立方体のフィルトレーションは一般の n で構成されている。超平面配置の方で対応するものを考えるために，一般の n では R^n とのテンソル積をとらなければならないが，すると超平面配置ではなく部分ベクトル空間の配置となる。そこでこのような部分ベクトル空間配置に対し，oriented matroid の概念を一般化し symmetric oriented n-matroid の概念を定義し，更にその組み合せ論的構造からその補集合のホモトピー型を表わす CW 複体を構成した。この一般化された Salvetti 複体のスケルトンによるフィルトレーションと小立方体のフィルトレーションを比較したところ n>2 のときには，異なるフィルトレーションであることが判明した。すなわち，Eilenberg-Moore スペクトル系列よりも細かなフィルトレーションにより定義される新たなスペクトル系列が得られたことになる。類似の多重ループ空間のホモロジーを計算するスペクトル系列の構成には Smirnov によるものや Ahearn と Kuhn によるものがあるが，これらのスペクトル系列とも異なることが分かった。また，このような部分空間配置の補集合の組み合せ論的モデルとしては，De Concini と Salvetti によるものがあるが，その構成と一致することも証明された。よって De Concini-Salvetti 複体と多重ループ空間のホモロジーとの関係が得られたことになる。

これらの研究成果は，arXiv で math/0602085 として公開中であり，投稿済みである。この研究は，ホモトピー論の研究者のみならず，超平面配置の研究者からも注目され，2008 年 2 月に神戸大学で行なわれた超平面配置の研究集会で招待講演として発表された。また，2009 年 8 月に北海道大学で行なわれる日本数学会主催の超平面配置の国際会議でも招待講演を行なう予定である。

(3) (2)の研究成果により，超平面配置の組み合せ論的構造が多重ループ空間の研究に有用であることが分かったため，当初の予定を変更し Gray の EHP スペクトラムの超平面配置による研究を始めた。その裏付けとなるのが Cohen-Kamiyama 予想という，複素平面の点配置の空間 F(C,j) の部分空間として得られる空間のホモトピー型に関する予想である。

この予想は，彼等の定義した重心配置の空間のある局所係数コホモロジーが，係数体の標数が 3 以上の場合に F(C,j)の局所係数コホモロジーと同型になるというものであり，証明されれば奇素数に関する Gray の EHP スペクトラムの次の段階が構成できることになる。

Cohen と Kamiyama は係数体の標数が 2 の場合には，予想が成り立たないことを，ホモトピー論的な手法を駆使して証明したが，そのより初等的な別証が超平面配置の組み合せ論的構造を用いて考察することにより得られた。この結果は，2007 年 11 月のソウル国立大学での東アジア代数的トポロジー国際会議や，2007 年 12 月の京都大学での国際会議での招待講演として発表した。

(4) 高次周期性の研究のためには K 理論の理解が不可欠である。K 理論の構成には様々なものがあるが，高次 K 理論へ一般化できる可能性のある構成は少ない。研究代表者は，Segal の K ホモロジー論の構成が，Dold-Thom による整係数常ホモロジーの無限対称積による構成の一般化であることに着目し，Segal の K ホモロジーの構成の一般化を研究した。

まず Segal の K ホモロジーの構成を Elmendorff-Kriz-Mandell-May のスペクトラムの構成により用いられた linear isometries operad を用いて再構築し，またそこに無限次元射影空間が自然に現

われることを示した。Atiyah-Segal により導入された K 理論の一般化である twisted K 理論も無限次元射影空間とその上への Fredholm 作用素の成す空間の作用により得られることから，これらの構成を比較した結果として，Segal K ホモロジーの構成の twisted K 理論への一般化が得られた。この結果は，2008 年 12 月のシンガポール国立大学での国際会議で招待講演として発表した。また，論文“Twisting Segal's K-homology theory”として出版予定である。

(5) (4)の構成によりホモロジー論が得られることを証明するために，より一般に両側バー構成により得られる構成を研究した。位相モノイド M が空間 X と Y に，それぞれ右および左から作用するときには，両側バー構成と呼ばれる単体的空間 B(X,M,Y)が得られるが，Y を一点に潰すことによる射影
p : B(X,M,Y) → B(X,M,*)
の幾何学的実現は多くの場合 quasifibratioin というファイブレーションに近いものになることが知られている。ところが，Segal の K ホモロジーで得られる空間は monoid ではなく，partial monoid の構造しか持たない。またこのような partial monoid に関するバー構成は，他のホモロジー論による構成でも現われる。

そこで，partial monoid に関する両側バー構成において，その直積への包含写像がホモトピー同値ならば，quasifibration が得られることを証明した。この結果は Segal の K ホモロジーやその twisted 版以外にも，Madsen-Tillmann の写像類群に基づいたホモロジー論の構成にも適用できる。

この結果は 2008 年 12 月のシンガポール国立大学での国際会議で招待講演として発表した。また，論文“Two-sided bar constructions for partial monoids and applications to K-homology theory”として出版予定である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3 件）

(1)Dai Tamaki, Two-sided bar constructions for partial monoids and applications to K-homology theory, Noncommutative Geometry and Physics, vol. 3, 2009, 印刷中，査読有

(2)Dai Tamaki, Twisting Segal's K-homology theory, Noncommutative Geometry and Physics, vol. 3, 2009, 印刷中，査読有

(3)Dai Tamaki, On the E^1-term of the gravity spectral sequence, Geometry and Topology Monographs, vol. 10, 2007, pp. 341-376, 査読有

〔学会発表〕（計　10 件）

(1)Dai Tamaki, On classifying spaces of partially defined algebraic structures, 代数・解析・幾何学セミナー，2009 年 2 月 19 日，鹿児島大学

(2)Dai Tamaki, Twisting Segal's K-homology theory, 東アジア代数的トポロジー国際会議，2008 年 12 月 19 日，シンガポール国立大学

(3)Dai Tamaki, Twisting Segal's K-homology theory, ホモトピー論研究集会，2008 年 12 月 6 日，サンポート高松

(4)Dai Tamaki, A homotopical introduction to twisted K-theory, Noncommutative Geometry and Physics 2008, 2008 年 2 月 18 日，19 日，湘南国際村

(5)Dai Tamaki, Hyperplane arrangements for iterated loop spaces, 超平面配置のさまざまな側面，2008 年 2 月 5 日，神戸大学

(6)Dai Tamaki, Iterated loop spaces and oriented matroids, International Conference on Topology and its Applications, 2007 年 12 月 5 日，京都大学

(7)Dai Tamaki, The little cubes and the Salvetti complex, 東アジア代数的トポロジー国際会議，2007 年 11 月 3 日，ソウル国立大学

(8)Dai Tamaki, 組み合せ論とホモトピー論はより親密になれるか，NY メイツの集い-名工大ホモトピー論集会 07-，2007 年 3 月 24 日，名古屋工業大学

(9)Dai Tamaki, Oriented n-matroids and little n-cubes, 空間の代数的・幾何学的モデルとその周辺，2006 年 9 月 6 日，信州大学

(10)Dai Tamaki, Homology theory and categorification, 城崎新人セミナー, 2005年2月23日, 城崎健康福祉センター

〔図書〕(計 2件)

(1)河野 明, 玉木 大, 一般コホモロジー, 岩波書店, 2008, 258pp.

(2)Akira Kono and Dai Tamaki, Generalized Cohomology, the American Mathematical Society, 2006, 264pp.

６．研究組織

(1)研究代表者

玉木 大 (TAMAKI DAI)

信州大学・理学部・准教授

研究者番号：10252058

(2)研究分担者

なし。

(3)連携研究者

なし。