

平成 21 年 4 月 10 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2005 ～ 2008

課題番号：17540097

研究課題名（和文）双曲結び目の非双曲 Dehn 手術に関する研究

研究課題名（英文）Non-hyperbolic Dehn surgeries on hyperbolic knots

研究代表者 茂手木 公彦 (MOTEGI KIMIHICO)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号:40219978

研究成果の概要：

本研究では、非双曲 Dehn 手術のうち、Seifert 手術 - Seifert 多様体を生成する手術 - に焦点を絞り、Seifert 手術がどのように生じるのか、その“発生のしくみ”を明らかにすることを目標に研究を進めてきた。ある結び目の Dehn 手術で Seifert 多様体が生じた際、“なぜ”その結び目が Seifert 手術を許容しているのか、その発生の原因を Seifert Surgery Network とよばれるネットワークを導入することにより、Seifert 手術の遺伝性という新たな視点で捉えることが可能となった。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	900,000	0	900,000
2006年度	600,000	0	600,000
2007年度	600,000	180,000	780,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	2,900,000	420,000	3,320,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：Dehn surgery, Seifert fiber space, hyperbolic knot, Seifert Surgery Network

1. 研究開始当初の背景

非双曲 Dehn 手術の中でも、Seifert 手術に関しては他の reducing 手術、toroidal 手術と異なり、発生する状況をきちんと理解することが困難であった。これは、reducing 手術、toroidal 手術では手術前と手術後を結びつける本質的曲面が存在しているのに対し、Seifert 手術ではそのような曲面が存在しないという事実によっている。そこで、本質的曲面に代わるものとして、本研究に先行する 2004 年度までの研究で seiferter と呼ばれる結び目補空間内の良い性質をもった結

び目が見いだされていた。この seiferter を用いることにより、手術後に生じる Seifert 多様体の Seifert ファイブレーションの一部をもとの 3 次元球面内で捉えることが可能となった。研究開始当初は seiferter の存在と双曲結び目上の Seifert 手術が整数であるという予想の関連について研究を進め、この予想の部分的な解決が得られるなど、seiferter の重要性が認識されつつあった。また、周期的結び目の対称性の軸と seiferter の関係に着目し、3 以上の周期をもつ双曲結び目は Seifert 手術をもち得ない

ことが示された。その後、twistingのもとで seiferter が遺伝するという興味深い性質が明らかになり、この事実をもとに、Seifert 手術全体からなるネットワーク (Seifert Surgery Network) を構築することが可能となり、Seifert 手術の大域的な研究に到達した。

2. 研究の目的

本研究では、非双曲 Dehn 手術のうち、Seifert 手術 - Seifert 多様体を生成する手術 - に焦点を絞り、Seifert 手術がどのように生じるのか、その“発生のしくみ”を明らかにすることを目標に研究を進めてきた。ある結び目の Dehn 手術で Seifert 多様体が生じた際、その手術後の多様体が実際に Seifert 多様体であることを証明する方法としては、これまでも Kirby calculus をはじめ Montesinos trick などいくつかの手法が知られている。その一方で、“なぜ”その結び目が Seifert 手術を許容しているのか、という問いかけはこれまでなされてこなかった。これはある人が風邪を引いた際に、実際に風邪を引いていることを確認するいくつかの方法は知られているが、その人が“なぜ”風邪を引いたのか、その理由を明らかにすることがなされてこなかった、ということに対応している。本研究では、特に、この“なぜ”という問いかけに重心を置き、Seifert 手術の起源の解明を主要な目的として研究を進めた。また、これまで個別に考察されてきた Seifert 手術をそれらの間の関連性に着目し、ネットワークの視点から大域的に捉え直すことも本研究の重要な目的である。

3. 研究の方法

Seifert 手術の典型的な例はトラス結び目上の Seifert 手術であり、Moser によって完全な分類がなされている。また、その発生のしくみについても、補空間の Seifert ファイブレーションの拡張という観点から自然な説明を与えることができる。一方、双曲結び目上の Seifert 手術に関しては、その発生のしくみが明らかになっていない。そこで、本研究では Seifert 手術に対して“seiferter”という新たな概念を導入し、双曲結び目上の Seifert 手術が seiferter を介して遺伝していくという事実に着目して理解する、という研究手法を提唱している。遺伝という視点で Seifert 手術を考えるための枠組みとして、seiferter の遺伝性を足がかりに Seifert 手術全体からなるネットワーク (Seifert Surgery Network) を構築した。また、Seifert Surgery Network の理論面での展開と、それを支える豊富な例の詳細な考

察という二つの面を有機的に結びつけて研究を進めて行くことが重要であり、コンピュータ実験なども取り入れながら興味深い現象の発見と理論的な解明に取り組みながら研究を進めてきた。

4. 研究成果

これまでの研究で seiferter のいくつかの基本的な性質を明らかにするとともに、seiferter の遺伝性をもとに Seifert 手術全体からなるネットワーク (Seifert Surgery Network) を構築することができた。これにより、従来のように個々の Seifert 手術を調べるのではなく、Seifert 手術全体の関連性から Seifert 手術発生のメカニズムを考えるとという新しい視点からの研究の枠組みが得られた。特に、ネットワーク内での Seifert 手術間のつながり方を調べることにより、双曲結び目上の Seifert 手術が“なぜ”生じているか、という発生の起源そのものを解明する糸口が得られたことは、Seifert Surgery Network という新たな枠組みでの研究の大きな成果である。その一方で、まだ重要な問題も未解決なまま残されている。今後の研究で、

- Seifert Surgery Network の連結性
- Seifert Surgery Network の非自明な結び目のまわりでの局所有限性
- Seiferter の幾何的、代数的特徴付けの解明を目指して研究を推進する。本研究の成果については国内外の多くの国際会議、研究集会で講演する機会を得ることができた。また、これらの講演をきっかけとして、新たな共同研究者を交えた研究も現在進展中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

① K. Ishihara and K. Motegi: Band sum operations yielding trivial knots, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, 査読有, 出版受理.

② K. Ichihara and K. Motegi: Hyperbolic sections in Seifert fibered surface bundles, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 査読有, 出版受理.

③ A. Deruelle, K. Miyazaki and K. Motegi: Networking Seifert surgeries on knots II: Berge's lens surgeries, Topology Appl., 査読有, 156 (2009) 1083-1113.

④ K. Ichihara and K. Motegi;
Seifert Fibered Slopes and Boundary Slopes
on Small Hyperbolic Knots, Bull. Nara Univ.
Ed. Natur. Sci., 査読有, 57 (2008), 21-25.

⑤ K. Ichihara and K. Motegi;
Hyperbolic sections in surface bundles,
Topology Appl., 査読有, 154 (2007),
1398-1406.

⑥ T. Mattman, K. Miyazaki and K. Motegi;
Seifert fibered surgeries which do not
arise from primitive/Seifert-fibered
constructions, Trans. Amer. Math. Soc.,
査読有, 358 (2006), 4045-4055.

⑦ M. AitNouh, D. Matignon and K. Motegi;
Geometric types of twisted knots,
Ann. Math. Blaise Pascal, 査読有, 13
(2006), 31-85.

⑧ H.-J. Song and K. Motegi;
All integral slopes can be Seifert fibered
slopes for hyperbolic knots, Algebr. Geom.
Topol., 査読有, 5 (2005), 369-378.

⑨ K. Ichihara and K. Motegi;
Braids and Nielsen-Thurston types of
automorphisms of punctured surface,
Tokyo J. Math., 査読有, 28 (2005),
527-538.

⑩ K. Miyazaki and K. Motegi;
On primitive/Seifert-fibered
constructions, Math. Proc. Camb. Phil.
Soc., 査読有, 138 (2005), 421-435.

⑪ M. AitNouh, D. Matignon and K. Motegi;
Obtaining graph knots by twisting unknots,
Topology Appl., 査読有, 146-147(2005),
105-121.

[学会発表] (計 15 件)

① K. Motegi;
Seifert surgeries on knots and their
network, Knots in Washington XXVII,
2009年1月11日, George Washington
University.

② K. Motegi;
Spreaders of Seifert surgeries on knots,
Intelligence of Low Dimensional Topology,
2008年10月7日, 大阪市立大学.

③ K. Motegi;
Networking Seifert surgeries on knots,
Topology Seminar, 2008年3月6日,
Universite de Nantes.

④ K. Motegi;
Networking Seifert surgeries on knots, GT3
Seminar, 2008年3月3日, Institute de
Recherche Mathematique Avancee (IRMA),
Universite Louis Pasteur.

⑤ K. Motegi;
" Seifert surgery のなすネットワークの解
明をめざして I "
" Seifert surgery のなすネットワークの解
明をめざして II "
第2回福岡・札幌幾何学セミナー, 2008
年2月19、20日, 九州大学.

⑥ K. Motegi;
Networking Seifert surgeries on knots, UT
Topology Seminar, 2007年9月17日,
The University of Texas at Austin.

⑦ K. Motegi;
Networking Seifert surgeries on knots,
UNAM Topology Seminar, 2007年11月
22日, Institute of Mathematics,
National Autonomous University of Mexico
(UNAM).

⑧ 茂手木公彦;
Networking Seifert surgeries on knots,
第53回トポロジーシンポジウム,
2006年8月8日, 大阪市立大学.

⑨ 茂手木公彦;
Seifert fibered surgeries のネットワーク,
近畿大学数学講演会, 2006年7月13
日, 近畿大学.

⑩ 茂手木公彦;
"ようこそ Seifert surgery の森へ", 早稲
田大学教育学部トポロジーセミナー,
2006年6月24日, 早稲田大学.

⑪ K. Motegi;
Networking Seifert Surgeries on Knots,
Knots, Groups and 3-Manifolds in Marseille
2006, 2006年5月23日, Universite de
Provence.

⑫ 茂手木公彦;
Networking Seifert fibered surgeries on
knots, 広島大学トポロジー・幾何セミナ
ー, 2006年2月21日, 広島大学.

⑬ K. Motegi;

ようこそ Seifert surgery の森へ,
トポロジーの展望, 2006年3月17日,
九州大学西新プラザ 大会議室.

⑭ 茂手木公彦;

All integral slopes can be Seifert fibered
slopes for hyperbolic knots, 東北結び目
セミナー, 2005年10月14日, 国際
蔵王高原ホテル.

⑮ K. Motegi;

On Seifert fibered slopes for hyperbolic
knots, First Arkansas-Oklahoma workshop
in Topology and Geometry, 2005年5月
20日, University of Arkansas.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

茂手木 公彦 (MOTEGI KIMIHIKO)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号: 40219978

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし