

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2005～2008

課題番号：17540162

研究課題名 (和文) 波動現象とプラズマ現象の非線形偏微分方程式による解析

研究課題名 (英文) Analysis of nonlinear partial differential equation of wave phenomenon or plasma phenomenon

研究代表者

小野 公輔 (ONO KOSUKE)

徳島大学・総合科学部・准教授

00263806

研究成果の概要：

自然現象の多くは偏微分方程式として数式で記述され解析されていて、波動現象が摩擦の影響を受けている場合の解析には消散型波動方程式の解構造の研究が必要となる。本研究では一般奇数次元の全空間におけるコーシー問題に対する消散型波動方程式の解の L^1 ノルムの一様有界性の証明や L^p タイプの減衰評価式の厳密な解析を行った。また、4次元と5次元の場合には自己相互作用の非線形項をもつ非線形消散型波動方程式の時間大域解の一意存在定理の証明やエネルギー評価式の厳密な解析を行った。さらに、外部領域における初期値境界値問題に対する消散型波動方程式の解空間構造の研究をおこなった。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	900,000	0	900,000
2006年度	800,000	0	800,000
2007年度	800,000	240,000	1,040,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	480,000	3,780,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式

1. 研究開始当初の背景

自然現象の解析には、その現象に対応する偏微分方程式を利用することが多く、物理学や工学の実験等でも利用されていて数学方面には数学的な道具の開発や理論的な裏付けが求められている。波動現象を記述する非線

形波動方程式およびプラズマ現象に関連する Vlasov 方程式系の基礎方程式の解空間の構造の解析や解の漸近挙動に関する数学方面からの解析が必要とされている。摩擦の影響を考慮した波動現象に対応する消散型波動方程式の解構造の特徴として、それまで知られていなかった、解の L^1 ノルムの時間一

様有界性が少しずつ知られるようになってきていた。しかし、この方面の研究は始まったばかりでさらなる進展が興味の対象となっていてその整備がまたれていた。また、1と2の間の p に対する解の L^p タイプの減衰評価式の詳しい解析も行われるようになりその詳しい解析も興味の対象となっていた。さらに、初期値が小さいときに、藤田指数を臨界指数にもつ自己相互作用に関連した非線形項をもつ非線形消散型波動方程式の時間大域解の一意存在定理の研究が盛んに行われていて、その解析に解の減衰評価式の応用が期待されていた。一方、全空間におけるコーシー問題の研究結果を、外部領域における初期値境界値問題に応用することも予想できる研究環境が整ってきていた。

2. 研究の目的

自然界における波動現象を考えると必然的に対応する方程式は非線形となり、摩擦抵抗の影響（例えば、音の伝搬を考えたときの空気による摩擦抵抗など）を考慮して方程式を考えた方が自然である。そこで、摩擦項を持つ波動方程式（消散型波動方程式やKirchhoffタイプ消散型波動方程式など）を研究対象とし、解空間の構成および解空間の構造の解析を行うことを目的としている。特に、解の時間大域的存在、一意性、漸近挙動、大域的非存在、散乱問題といった一連の相互に関連し合う問題に対して新しい結果を得ることを目指す。また、プラズマ現象に関連する非線形偏微分方程式はプラズマ物理学によって数多く考案されているが、粒子の衝突効果（例えば、ブラウン運動におけるFokker-Planck型の衝突効果など）の考慮の仕方によって方程式が決定されることから、Vlasov方程式関連の基礎方程式を研究対象とし、解空間の構成を行い、解の漸近挙動、解の滑らかさに関する問題の研究を行う。

3. 研究の方法

自然現象を記述する非線形偏微分方程式に関する研究、特に、波動現象を記述する非線形波動方程式に関する研究やプラズマ物理学に現れるプラズマ関連の基礎方程式に関する研究は、楕円型方程式、方物型方程式、および、双曲型方程式等の様々な偏微分方程式と密接な関係があり、これらの偏微分方程式の研究を行っている研究者との研究討論および情報の交換等は研究を進めて行く上で必要不可欠のものである。そのためにも、

学会だけではなく各地で開催されている研究集会等にも積極的に参加する。また、研究成果の発表を行い研究討議を通して研究成果のアピールに繋げていく。一方、大学内の雑誌あるいは資料といった研究を進めている上で、必要なものが不足している上に、独立行政法人化による予算の削減により国際レベルの研究の継続が困難になってきた。従って、他大学あるいは研究所等へ情報収集および資料収集にでかけて行くことになる。また、コンピュータの普及により、コンピュータによる偏微分方程式の解の漸近挙動に関する数値解析や数値シミュレーションおよびグラフ表示による解析が重要な役割を果たすようになってきた。そこで、コンピュータやその支援ソフトを購入し、コンピュータを研究の有力な道具の一つとして役立ていく。研究そのものの方法としては、新しい定理の発見とその証明を行い国内外の雑誌に掲載していくことになる。また、証明の方法は数学的な手法をもちいることになる。特に、全空間におけるコーシー問題に対する非線形波動方程式の解析には実解析的な手法や関数解析的な手法が有効であり、主に、エネルギー法やフーリエ解析法を用いている。また、外部問題に対する研究では、全空間における結果を利用すると共にカット・オフ法や局所エネルギー法なども利用する。また、結果を予測するためにコンピュータを活用する。

4. 研究成果

研究した成果の一部は学術論文として学術論文紙に投稿掲載したり、研究集会等で講演したりしてきた。国内外の雑誌に掲載することでこの分野の研究の進歩や現象解析に対して数学方面からの貢献をすることができた。以下では学術論文としてまとめることができたものについて説明を加えることにする。

- (1) 一般の奇数次元の全空間におけるコーシー問題に対する消散型波動方程式の時間大域解の1以上の p に対する L^p タイプの減衰評価式の研究では、その評価式の詳しい解析を行った。特に低次元の場合によく知られていた解表示を一般の奇数次元の場合にも厳密に記述し、解表示に現れる積分項の領域を分割することにより、解の評価式を導くためのいくつかの命題を準備した。これまで明らかになっていなかった一般の奇数次元の場合を明らかにしたことで解の L^p 評価式の整備が進むこととなった。また、解の高次の導関数に対しても予想される L^p タイプ

- の減衰評価式を導くことができた。
- (2) 一般次元の全空間におけるコーシー問題に対する消散型波動方程式の時間大域解の L^1 ノルムの一様評価式の研究では、その評価式を統一的に整理した形で論文にまとめた。特に、解表示については偶数次元と奇数次元を並列して記述することでその違いやその後の評価の仕方の違いなどが分かるような形でまとめた。また、そのときに必要となる初期値の滑らかさに関する条件も明らかにしている。
- (3) 4次元と5次元の全空間におけるコーシー問題に対する摩擦項と爆発型の自己相互作用に関連する非線形項をもつ半線形消散型波動方程式の時間大域解の存在に関する研究では、その存在定理を示した。これは低次元の場合に厳密な解表示を利用することで解の L^1 ノルムの一様有界性を示し、Fujita 指数に関連した結果が得られていることを、高次元の場合に拡張したものとなっている。高次元の場合には解の L^1 評価に必要な初期値の滑らかさに関する条件がきつくなり結果として4次元と5次元までの場合の未解決問題を解いたこととなっている。5次元を超える場合にはここで扱っている様な関数空間では扱うことができない。また、解の L^1 ノルムの一様有界性を導くことができたことによる副産物として解の L^p タイプの減衰評価式の詳しい解析やその導関数の減衰評価式についても結果を与えている。
- (4) 3次元以上の一般次元の外部領域における初期値境界値問題に対する消散型波動方程式の時間大域解の L^1 ノルムの一様評価式の研究では、全空間における結果に類似する様な評価式の導出を行った。証明には全空間における一様評価式の結果を応用し、外部問題の境界近辺における困難をカット・オフ法とエネルギーの減衰構造の特性を利用することにより行っている。また、期待される高次のエネルギーの減衰評価式についても結果を与えている。これまで、外部領域におけるこの種の研究結果は低次元の場合に限定されていたが全空間における研究が進んだことにより一般次元まで研究できるようになった。ここでの結果は外部問題における解の漸近挙動や解空間の構造の解明に役に立つことになるだけでなく、非線形問題の解析にも役にたつことが期待できる結果となっている。
- (5) 2次元の外部領域における初期値境界値問題に対する消散型波動方程式の時間大域解の L^1 ノルムの評価式の研究では、それまで多項式オーダーの増大評価式であった結果を対数関数オーダーの増大評

価式に改良することに成功した。これは初期条件として必要となる関数空間のクラスを1つ分だけ増加させることでソボレフの埋め込み定理を有効に利用できるようにすることで可能になっている。また、この評価式を利用して高階エネルギーの減衰評価式を多項式オーダーと対数関数オーダーの積の形で与えている。

- (6) 一般次元の内部領域における初期値境界値問題に対する自己相似作用に関連する非線形項と強い摩擦作用および速度に比例した摩擦作用に関連する摩擦項をもつ非線形消散型波動方程式の一様有界な時間大域解の存在に関する研究では、一様有界な時間大域解の存在定理を示すことができた。ここでは、非線形項の指数が小さい場合を問題としていてこれまで時間に関して増大するような評価しか得られていなかった評価式を改良し、その解が時間に関して一様有界となるための条件を調べている。また、2種類の摩擦項を考えることで、弱い摩擦項の係数が負になる場合であっても解の評価が有効であるための条件式を明らかにしている。証明中ではエネルギー法とソボレフの埋め込み定理を巧みに利用し非線形項の処理を行っている。非線形の摩擦項をもつ方程式の場合の研究は今後の課題となっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6件)

- ① Kosuke Ono
 L^p decay problem for the dissipative wave equation in odd dimensions,
 Journal of Mathematical Analysis and Applications,
 Vol. 310 No. 2, pp. 347--361, 2005.
 査読有
- ② Kosuke Ono
 On L^1 estimates for solutions of dissipative wave equations,
 Nonlinear Analysis,
 Vol. 63 No. 5-7, pp. 1769--1777, 2005.
 査読有

③ Kosuke Ono
Global solvability for the semilinear
damped wave equations in Four and Five
Dimensions,
Funkcialaj Ekvacioj,
Vol. 49 No. 2, pp. 215--233, 2006.
査読有

④ Kosuke Ono
 L^1 estimates for dissipative wave
equations in exterior domains,
Journal of Mathematical Analysis and
Applications,
Vol. 333 No. 2, pp. 1079--1092, 2007.
査読有

⑤ Kosuke Ono
 L^1 estimates for the dissipative wave
equation in a two dimensional exterior
domain,
Journal of Mathematics, The University
of Tokushima,
Vol. 41, pp. 43--57, 2007.
査読無

⑥ Kosuke Ono
Existence of global and bounded
solutions for damped sublinear wave
equations,
Journal of Mathematics, The University
of Tokushima,
Vol. 42, pp. 19--26, 2008.
査読無

[学会発表] (計 3件)

① 小野公輔
On L^1 estimates for dissipative wave
equations in exterior domains,
2005年度日本数学会秋期総合分科会,
岡山大学, 2005. 9. 21.

② 小野公輔
 L^1 estimates for dissipative wave
equations in an exterior domain,
偏微分方程式特別研究集会, A Special
Conference on Partial Differential
Equations,
福岡大学セミナーハウス, 2006. 10. 27.

③ 小野公輔
外部領域における dissipative wave
equation の解の L^1 評価について,
早稲田大学理工学部講演会,
早稲田大学, 2006. 11. 17.

[図書] (計 2件)

① 理工系の線形代数学入門, 守安一峰・小
野公輔共著, サイエンス社, 初版第 2 刷,
2005 年 9 月発行, 総頁数 185 ページ.

② 初歩からの複素解析, 香田温人・小野公
輔共著, 学術図書出版社, 第 1 版第 2 刷,
2007 年 9 月発行, 総頁数 140 ページ.

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小野 公輔 (ONO KOSUKE)
徳島大学・総合科学部・准教授
0 0 2 6 3 8 0 6