

平成 21 年 5 月 30 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2005～2008

課題番号：17540177

研究課題名（和文） 複素 3 次多項式写像族の力学系の研究

研究課題名（英文） A study on the dynamics of the family of complex cubic polynomials

研究代表者

中根 静男 (NAKANE SHIZUO)

東京工芸大学・工学部・教授

研究者番号：50172359

研究成果の概要：放物的不動点を持つ 3 次多項式の Branner-Hubbard-Lavaurs deformation の理論を構築し、stretching rays の振動の規則性や stretching map の不連続性を解明した。高次多項式の Julia set の性質を用いることにより、base Julia set が連結でない Axiom A polynomial skew product の力学系について、特に危点集合の集積点集合の性質を解明し、新しい例を構成した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	900,000	0	900,000
2006 年度	600,000	0	600,000
2007 年度	600,000	180,000	780,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	2,700,000	360,000	3,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：Branner-Hubbard-Lavaurs deformation, stretching ray, straightening map, Axiom A polynomial skew product, base Julia set, fiber Julia set, point-wise accumulation set, component-wise accumulation set

1. 研究開始当初の背景

(1) 3 次多項式写像族の力学系に特有な現象である不連続性は、放物的な周期点を持つようなパラメータの集合 (parabolic locus) 上で生じる。例えば、straightening map の不連続性、stretching map の不連続性、connectedness locus の非局所連結性、stretching rays の非着地性等の現象はすべて、固有値が 1 の放物的不動点を持つようなパラメータで生じることが示されるのである。その原因は、危点が 2 個あるため、2 個の危点の力学的な位置の変化が自明で

ない擬等角変形を引き起こすことに起因する。筆者は小森洋平氏との共同研究で parabolic locus 上でほとんどの stretching rays が着地しないことを証明した。Stretching rays をコンピュータで描いてみると、振動しているが、その振動の仕方が $y = \sin(1/x)$ のグラフのような規則的な曲線になることが観測される。この振動の規則性を説明せよというのが John Milnor に示唆された問題である。

(2) 1 次元の力学系では、危点の軌道の振舞

が大域的な性質までも決定するが、高次元の場合は、危点集合の振舞と力学系の大域的性質の関係は十分には解明されていない。Polynomial skew product の力学系は fiber を保つので、1次元の random な力学系とみなすことができるために、1次元の力学系の理論が応用できる。そして、いろいろな性質を持つ写像の例を構成しやすい。高次元の場合、実例が少ないことが難点であるが、polynomial skew product は多くの例を与えてくれることが期待されている。

DeMarco-Hruska は Axiom A polynomial skew product の危点集合の軌道を解析した。危点集合の集積点集合として、彼女たちは、通常の集積点集合 A に加えて、各危点の集積点集合の和集合の閉包である point-wise accumulation set A_{pt} と、危点集合の各連結成分の集積点集合の和集合の閉包である component-wise accumulation set Acc を定義して、 A と A_{pt} の、サドル基本集合とその不安定多様体による特徴づけを与えた。さらに、これらの集合が種々の関係を満たすような例を構成した。ただし、彼女たちは主に2次の場合を考察したために、base Julia set は連結が完全不連結のどちらかであった。そして、そのどちらでもないような場合の例を構成せよという問題を提起した。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、3次多項式写像族に現れる不連続性等の現象の背景に共通に存在するメカニズムを解明する。そのために、固有値が1の放物的な不動点を持つようなパラメータ空間の集合 $Per_1(1)$ への stretching rays の集積点集合を解析する。このアプローチを通して straightening map や stretching map の不連続性を研究する。そして、stretching ray の振動の規則性を説明する。

(2) 2次元 Axiom A polynomial skew products の複素力学系について、特に危点の挙動が力学系をどこまで決定できるかを解明する。そのために、危点集合の集積点集合の諸性質を解明し、その集積点集合の性質によって写像を分類し、その性質を持つ写像の例を構成する。具体的には、DeMarco-Hruska の提起した次の問題を解決する。

base Julia set が連結でも完全不連結でもない Axiom A polynomial skew product の例で次の各性質を満たすものを求める。

$$A_{pt} = Acc \quad A$$

$$A_{pt} \quad Acc = A$$

$$A_{pt} \quad Acc \quad A$$

$Acc = A$ の特徴づけを与える。

これは、base Julia set が不連結な場合に意味がある。

3. 研究の方法

(1) 3次多項式のパラメータ空間上、 $Per_1(1)$ の近傍を解析するために、Branner-Hubbard deformation に Lavaurs map による変形を加えた Branner-Hubbard-Lavaurs deformation (BHL-deformation) を導入する。この2つの deformations の間には類似点と相違点があるが、それらをうまく使いこなすことにより、BHL-deformation の理論を構築し、我々の問題を解析する。2つの危点の位置関係を表す量として、shift locus 内の写像の loglog Boettcher coordinate での危点の差である Boettcher vector がある。また、放物的サイクルを持つ写像に対しては、Fatou coordinate での危点の差である Fatou vector があるが、さらに Lavaurs map による危点の像の loglog Boettcher coordinate での差である Boettcher-Lavaurs vector を定義し、これらを用いる。

(2) Axiom A polynomial skew product に関する DeMarco-Hruska の問題を解くためには、1変数の高次多項式の力学系の結果が必要になる。特に不連結な Julia set の1点でない連結成分は前周期的であるという Yin-Qiu の最近の結果から、Julia set の周期的な1点でない連結成分の和集合 J_{per} 上の力学系が重要であることがわかる。 J_{per} 上の振舞いを解析することにより問題を考察する。また、3次多項式族の研究においても有用だった、3次多項式と類似の性質をもつ、実 biquadratic maps という4次多項式も利用する。

(3) 数学の研究において重要なことは国内外の研究者との討論である。特に筆者のように、大学に同じ分野の研究者がいない場合には、年1回の海外出張と年数回の国内出張は欠かせない。また、力学系の分野では、パラメータ空間や fiber Julia set をコンピュータで描くことによって、結果を類推することがある。Stretching ray の規則的な振動も、実際にそれを描画して初めて観測されたものである。

4. 研究成果

(1) 固有値1の放物的不動点を持つような実3次多項式写像の BHL-deformation を定義する。Branner-Hubbard deformation から stretching ray を定義したように、BHL-ray を定義する。BHL-ray が住む空間は $Per_1(1)$ と phase の空間 R の直積空間である。Stretching ray と BHL-ray の間にはかなりの類似がある。例えば、stretching ray 上 Boettcher vector は一定であるが、BHL-ray 上 Boettcher-Lavaurs vector が一定になる。

異なる所は、stretching ray には周期性がないが、BHL-ray は phase に関して周期的である。得られた結果は、

Fatou vector が整数でなければ、BHL-deformation は自明でない変形を与える。Fatou vector が整数ならば変形されない。Boettcher-Lavaurs vector map の等位曲線は BHL-ray である。

BHL-ray の $\text{Per}_1(1)$ への射影は同じレベルの stretching ray の集積点集合と一致する。

の証明には stretching rays の非着地性が本質的に使われた。と BHL-ray の周期性から stretching ray の規則的な振動を説明することができる。さらに、

\mathbb{Q} $\text{Per}_1(1)$ が非自明な BHL-deformation を持てば、stretching map は \mathbb{Q} で不連続である

ことも示すことができた。これらの結果をまとめて論文(下記の)として発表した。以上の結果はすべて実 3 次多項式の場合である。この場合でも、Boettcher Lavaurs vector map の単調性については、それが整数の点の近傍での局所単調性が証明されたが、完全な証明は未完成である。実でない場合はさらにわかっていないことが多い。Fatou vector が整数の \mathbb{Q} $\text{Per}_1(1)$ には stretching ray が着地すると予想しているが証明は完成していない。関連する話題として、critical orbit relation を持つような双曲的 3 次多項式写像の turning deformation の研究も今後の課題である。

(2) Axiom A polynomial skew products に関しては、

base Julia set が連結でも不連結でもない Axiom A polynomial skew product で $\text{Apt} = \text{Acc} = A$ を満たす例を実 biquadratic maps を用いて構成し、

base Julia set が不連結の場合、 $\text{Acc} = A$ ならば $\text{Apt} = \text{Acc} = A$ が成り立つこと、つまり $\text{Apt} = \text{Acc} = A$ を満たす例は存在しないことを証明した。

Base Julia set が連結の場合は、 $\text{Acc} = A$ が常に成り立つので、から $\text{Acc} = A$ の特徴づけが与えられたことを意味する。これらの成果はいくつかの研究集会で発表し、その中のひとつのプロシーディング(下記の)に概要が掲載された。下記の の研究集会では、来日した DeMarco とも議論することができた。

これにより、高次の場合は 2 次の場合とは違ってはるかに複雑になることが明らかになりつつある。今後の課題として、次が挙げられる。

$\text{Apt} = \text{Acc} = A$ を満たす例を構成する。そのような写像の base Julia set は必然的に連結でも完全非連結でもない。

Acc の Jper 上のサドル集合の不安定多様体を用いた特徴付けを与える。

$\text{Apt} = \text{Acc}$ の Jper 上の力学系としての特徴づけを与える。

$\text{Apt} = A$ はかなり強い条件であるが、この条件を満たす写像の力学系の諸性質を解明する。

base Julia set が連結で、その上のすべての fiber Julia set が連結だが同相ではないような例を構成する。

については、 の例を構成した実 biquadratic maps の族の中に候補があると予想しているが、いくつかの困難を克服できないでいる。

に関して、polynomial でない rational skew product の例の存在は知られている。その構成には self-similar groups の理論が使われていて、興味深い課題である。また、base Julia set が連結でない場合も例が知られているが、その例は $\text{Apt} = A$ を満たしていて、 の問題とも関係している。この辺の問題は結果が予想できないので、数値実験をすることも必要であろう。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Shizuo Nakane, Remarks on Axiom A polynomial skew products of higher degrees. Proc. International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 196-200, 2009, 査読無.

Shizuo Nakane, Branner-Hubbard-Lavaurs deformations for real cubic polynomials with a parabolic fixed point. Conformal Geometry and Dynamics. Vol. 13, 110-123, 2009, 査読有.

Shizuo Nakane, External rays for polynomial maps of two variables associated with Chebyshev maps. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 338, 552-562, 2008. 査読有.

Shizuo Nakane, A mathematical study of Carnot cycles for real gasses. JP Jour. Solids & Structures, Vol. 1, 27-33, 2007, 査読有.

Shizuo Nakane, Dynamics of a family of quadratic maps in the quaternion space. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 15, 2535-2543, 2005, 査読有.

〔学会発表〕(計 12 件)

Shizuo Nakane, On Axiom A polynomial skew products of higher degrees. Workshop “Moduli and invariants in complex analysis and algebraic geometry.” 2008 年 11 月 27 日, 京都工芸繊維大学

Shizuo Nakane, Axiom A polynomial skew products of higher degrees. RIMS Workshop “New development in the study of Dynamical Systems beyond Uniform-Hyperbolicity.” 2008 年 10 月 2 日, 京都大学数理解析研究所.

中根静男, Component-wise accumulation sets of critical sets for Axiom A polynomial skew products. 日本数学会秋季総合分科会, 2008 年 9 月 25 日, 東京工業大学.

Shizuo Nakane, Remarks on Axiom A polynomial skew products of higher degrees. 16th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2008 年 7 月 29 日, 韓国, 慶州, 東国大大学校.

中根静男, An Axiom A polynomial skew product of degree four. 日本数学会年会, 2008 年 3 月 24 日, 大阪市立大学.

Shizuo Nakane, Branner-Hubbard-Lavaurs deformation of parabolic cubic polynomials. 15th International Congress on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications. 2007 年 7 月 31 日, 大阪市立大学.

中根静男, Branner-Hubbard-Lavaurs deformation of parabolic cubic polynomials, RIMS 研究集会 “複素力学系とその周辺分野の研究”, 2006 年 1 月 25 日, 京都大学数理解析研究所.

Shizuo Nakane, Branner-Hubbard-Lavaurs motion of parabolic cubic polynomials. Workshop “Parabolic Points” in Hangzhou, 2005 年 4 月 18 日, 中国, 杭州, 浙江大学.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等:

<http://www.gen.t-kougei.ac.jp/math/nakane/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中根 静男 (NAKANE SHIZUO)

東京工芸大学・工学部・教授

研究者番号: 50172359

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者