

平成 21 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2005－2008

課題番号：17540182

研究課題名 (和文) 実解析的・複素解析的関数と非線型偏微分方程式論

研究課題名 (英文) real/complex analytic functions and theory of nonlinear partial differential equations

研究代表者

山根 英司 (YAMANE HIDESHI)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号: 80286145

研究成果の概要：

関数論 (複素解析) の手法を使って非線型偏微分方程式について調べた。ある曲面または曲線に沿って特異性をもつ解を構成することに興味がある。非線型波動方程式を始めとするある種の非線型偏微分方程式については主要項が対数関数で表される特異解を構成した。非線型シュレーディンガー方程式について、主要項が -1 乗の特異性を持つ形式解の収束を証明した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	600,000	0	600,000
2006 年度	500,000	0	500,000
2007 年度	400,000	120,000	520,000
2008 年度	400,000	120,000	520,000
年度			
総計	1,900,000	240,000	2,140,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，基礎解析学

キーワード：非線型方程式，実解析関数，複素解析関数，フックス型，特異解

1. 研究開始当初の背景

非線型偏微分方程式の特異解の構成についていくつかの事実が知られていたが、対数的特異性に関する結果はほとんどなかった。非線型シュレーディンガー方程式に関する結果も少なかった。べき程度の特性については、Weiss-Tabor-Carnevale の結果が有名で、それに影響を受けた Kichenassamy, 小林隆夫, Joshi らが興味深い結果を出している。

特に前 2 者は、主要項を形式的計算で求め、剰余項が満たすフックス型偏微分方程式を解く方法、すなわち Fuchsian Reduction という強力な方法を開発した。さらに、収束するかどうかはともかくとして、形式べき級数解の構成については Weiss-Tabor-Carnevale に続く研究成果が蓄積されていた。

Fuchs 型偏微分方程式の研究を始めたのは Baouendi-Goulaouic であり、それに続く研

究は日本でもっとも盛んであった。ところが、Kichenassamy は独自の立場で Fuchs 型方程式の研究を進め、それを Fuchsian reduction に応用したのである。日本では彼の存在に気づくのは遅く、小林も彼の結果を引用していない。小林は田原の理論を使ったのである。

最近になって、代表者が Kichenassamy の業績に注目し、彼のアイデアと田原の理論を組み合わせることを考えるようになった。さらに、数理物理で蓄積された可積分系に関する知見も組み合わせようと考えた。また、直接結果を引用するわけではないが、フーリエ解析を用いて非線型波動方程式や非線型シュレーディンガー方程式などを研究している人たちの結果も参考にして、どんな問題が興味深く、面白い結果が出そうなのかを検討し、研究の方向を定めた。すなわち、むやみに一般論を追求するのではなく、非線型波動方程式や非線型シュレーディンガー方程式などの、素性のはっきりした由緒正しい方程式について、特異解を構成してその性質（漸近挙動など）を詳しく調べようという方向である。今まで代表者は一般論を作って広く浅く調べることが多かったのだが、最近はある特定の方程式について狭く深い結果を得ることに興味を持つようになった。

2. 研究の目的

ある種の非線型偏微分方程式について対数的特異性をもつ解を構成すること。また、非線型シュレーディンガー方程式について -1 乗の特異性をもつ解を構成することが目的である。

対数的特異性を持つ解を構成したい方程式のうち、もっとも重要なのは非線型波動方程式である。非線型波動方程式は多くの人々がさまざまな立場から研究している非常に重要な対象であり、これについてほとんど任意の非特性面に対数的特異性を持つ解を構成し、その主要項の係数を決定することが出来れば画期的な結果となり、今後の研究の一つの指針を与えると期待される。

非線型シュレーディンガー方程式については、特に非線形項に絶対値を含むものを調べたい。絶対値は、ソボレフ空間に対しては単純な振る舞いをするが、複素解析関数に対しては良い性質を持たないので、解析的カ

テゴリでの扱いが難しい。ところが、可積分系における Clarkson のアイデアを用いれば、解析カテゴリでも絶対値が扱える。これが実現すれば、解析カテゴリで絶対値を扱ったおそらく最初の例となる。

3. 研究の方法

Fuchsian Reduction あるいは可積分系の研究に由来する方法を用いる。

特異解の主要項を形式的計算で求め、剰余項が満たすべき方程式を求める。それがいわゆる Fuchs 型になるというのが Fuchsian Reduction である。Fuchs 型方程式は田原による研究結果を用いて解くことができ、したがって元の方程式も解ける。主要項が対数を含む場合は Fuchs 型方程式の係数が特異性を持つことになるが、この困難は細かい評価を一からやり直せば克服できる。

非線型シュレーディンガー方程式の非線形項に含まれる絶対値は、Clarkson のアイデアにしたがって、未知関数 u の複素共役を新しい未知関数 w と思って、単独方程式を連立方程式に書き換えて形式解を構成し、さらにその係数を評価して形式解の収束を調べる。

4. 研究成果

ある種の非線型偏微分方程式の解であって、 $t=0$ での漸近展開の主要項が t の 1 乗と $\log t$ の積を含むものを構成した。特に非線型波動方程式の特異解を構成した。同じ方法で 3 階の例も作れる。

ある種の非線形シュレーディンガー方程式について、Clarkson が構成した -1 乗の特異性を持つ形式解の族について、その収束を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① 山根英司, 熱方程式の逆問題--春木・磯論文(8 巻 1 号)の条件の緩和について, 日本応用数学会論文誌, 18 (2) 267-270 (2008) 査読有り
- ② Hideshi YAMANE, Hidetoshi Tahara, *Logarithmic singularities of solutions to nonlinear partial differential equations*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 60(2), 603-630 (2008) 査読有り
- ③ Hideshi YAMANE, *Nonlinear wave equations and singular solutions*, Proceedings of the American Mathematical Society, 135 (11), 3659-3667 (2007) 査読有り
- ④ Hideshi YAMANE, *Nonlinear Cauchy problems with small analytic data*, Proceedings of the American Mathematical Society, 134(11), 3353-3361 (2006) 査読有り

[学会発表] (計 11 件)

- ① 山根英司, 非線型偏微分方程式と動く特異性, 京都大学理学部, 微分方程式の総合的研究, 2008 年 12 月 21 日
- ② Hideshi YAMANE, Logarithmic singularities of solutions to nonlinear partial differential equations, Universita' di Cagliari(イタリア), Decay and regularity for solutions of differential equations and dynamical systems, 2008 年 9 月 24 日

- ③ Hideshi YAMANE, Logarithmic singularities of solutions to nonlinear partial differential equations, 京都大学数理解析研究所, 解析的な方程式の新しい取り組み-変換論と特異解、Stokes 問題 - (New approach to analytic equations -transformation theory, singular solutions and Stokes problem-), 2008 年 9 月 18 日
- ④ Hideshi YAMANE, Logarithmic singularities of solutions to nonlinear partial differential equations, The Institute of Mathematics of the Polish Academy of Science, Bedlewo, ポーランド, The Banach Center Conference, Formal and Analytic Solutions of Differential Equations, 2008 年 8 月 14 日
- ⑤ 山根英司, 非線型偏微分方程式の解が持つ対数的特異性, 近畿大学, 日本数学会, 2008 年 3 月 25 日
- ⑥ 山根英司, Singular solutions to nonlinear PDEs: a Fuchsian approach, 数学統計学院主催のセミナー, 武漢大学, 中国, 2007 年 3 月 7 日
- ⑦ 山根英司, Nonlinear wave equations and singular solutions, 京都大学数理解析研究所, 微分方程式系の代数解析と完全 WKB 解析, 2006 年 12 月 11 日
- ⑧ 山根英司, Nonlinear wave equations and singular solutions, Partial differential equations on noncompact and singular manifolds, Potsdam University, ドイツ, 2006 年 8 月 9 日
- ⑨ 山根英司, 小さい実解析的初期値をもつ非線型コーシー問題, 日本数学会, 中央大学理工学部, 2006 年 3 月 26 日

⑩ 山根英司, Nonlinear Cauchy Problems with Small Analytic Data, 武漢大学, 中国, Partial Differential Equations and Perturbation Analysis, 2005年9月15日

⑪ 山根英司, Nonlinear Cauchy Problems with Small Analytic Data, 日本数学会国際研究集会, 漸近解析と特異性, 仙台国際センター, 2005年7月19日

[図書] (計 1 件)

① 山根英司, 関数とはなんだろう, 講談社ブルーバックス, 2008年, 238.

[その他]

ホームページ等

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~yamane/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山根 英司 (YAMANE HIDESHI)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号: 80286145

(2) 研究分担者

なし.

(3) 連携研究者

なし.