様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　６月１５日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2005～2008
課題番号：17540190
研究課題名（和文）非可換確率空間における独立性の変形と変形フォック空間に関する研究

研究課題名（英文）Deformations of independence on non-commutative probability spaces and deformed Fock spaces

研究代表者
吉田　裕亮（YOSHIDA HIROAKI）
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・教授
研究者番号：10220667

研究成果の概要：本研究では，非可換(量子)確率空間における独立性の変形をモーメント・キュムラント関係式の変形と捉えることにより，順序集合の分割統計の理論と確率分布の変形理論との関係，さらに構成された変形独立性を実現する非可換確率空間のモデルをフォック空間の変形で与える研究を行った．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００５年度	900,000	0	900,000
２００６年度	800,000	0	800,000
２００７年度	700,000	210,000	910,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,200,000	450,000	3,650,000

研究分野：非可換確率論
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非可換確率論，作用素環論，変形量子化，量子確率論，変形合成積

１．研究開始当初の背景

本研究は非可換確率空間における，独立性の概念の変形を研究の対象としている．非可換確率空間においては独立性の概念は一通りではない．独立性とは任意の混合モーメントの計算則を与えるものと考えれば，ある公理の下では３種しか入らない．すなわち，通常の独立性，自由独立性，ブール独立性の３つである．これは，最も狭い意味での独立性であり，独立性の陽（explicit）な定義と考えられる．しかし，独立性の概念は合成積を引き起こし，そして合成積は，いわゆるモーメント・キュムラント公式を導く．したがってモーメント・キュムラント公式が，陰（implicit）に独立性を定めていると考えられる．以上は，非可換確率空間における独立性の変形の鍵となる．

通常の独立性，自由独立性，ブール独立性の間には，密接した組合わせ論的類似性があることが知られている．それはモーメント・キュムラント公式における順序集合の分割との関連である．通常の独立性の概念によるモーメント・キュムラント公式は全ての分割に対応し，自由独立性の場合は非交叉分割にのみ制限される．またブール独立性の場合には非交叉分割の特別な場合である，区間分割に更に制限が加えられることである．独立性の変形をモーメント・キュムラント公式の変形として捉え，それに対応する Fock 空間の構成とその上の生成・消滅作用素の交換関

係の考察を行うという作用素環論的アプローチと，それらの組合わせ論的な考察で研究を進める計画とした．

本研究を開始するにあたり， 研究代表者は，モーメント・キュムラント公式の変形が集合分割の各ブロックに荷重を与えることで実現可能であることを一連の研究で示していた．また，よく知られている q－変形に関しては，その変形に対応する q－Poisson 分布を与える非可換確率変数を q－変形 Fock 空間上で構成することに成功していた．

これらの更なる拡張として Bozejko 氏等により導入されたｓ－変形の場合には，以前から知られたいたｔ－変形と同様に，変形 Fock 空間の構成に成功し，その上の生成作用素，消滅作用素を用いて，Gauss 確率変数および Poisson 確率変数を，交換関係を基に構成したすることの可能性が見えてきた．

このことより，更に一般の独立性の変形とそれに対応する変形 Fock 空間の構成を目指すべく研究を開始することとした．

２．研究の目的

通常の確率空間とは，基礎空間 Ω，σ－代数 Σ，確率測度μからなる３つ組(Ω，Σ，μ）である．また確率変数 x とはΩ上の可測関数であり， x が可積分ならば，その期待値 E(x) は Ω上のμによる積分で与えられる．ここでΩ上の有界な可測関数全体からなる関数環（ただし，和および積はΩの各点毎の和および積として与える）を考えると，これは可換な Banach 代数となる．この可換な Banach 代数とΩ上の積分で与えられる期待値写像を併せれば，Gelfand の定理により，元の確率空間を復元するに足る十分な情報が含まれていることが分かる．このように代数的な性質だけに注目し，確率空間を代数的に取り扱うことにより，抽象的に非可換確率空間を考えることが可能である．すなわち A を単位元を含む一般に非可換な代数とする．また，φ を φ(1)＝1 を満たすA上の線形汎関数とする．このとき，これらの組(A, φ)を一般に非可換確率空間と呼ぶ．もちろん，このとき Aの元は確率変数であり，φは期待値を与えると考えられる．本研究では，特に A が C* 代数，φ を A 上のステートとして取り扱うことになる．これは分布というものがより現実的なものとして与えられる場合でもある． 実際，非可換確率変数の分布は次のように考えられる． (A, φ）を非可換確率空間とするとき，非可換確率変数 a ∈ A の分布 μ_a は，以下のように定義される．C[X] を複素係数多項式環とし任意の多項式 p(X) に対して μ_a (p(X))=φ(p(a)) で与えられる線形写像 μ_a：C[X] → C を a の分布と呼ぶ．これは確率変数 a のモーメントを定めたことに他ならない．特に A が C*代数で a ∈ A が自己共役作用素のときは，スペクトル分解を考えることにより，スペクトル測度を介して μ_a から実数上のコンパクトな台をもつ確率測度が自然に誘導される．

我々はこのような非可換確率空間において，独立性の概念の変形を研究の対象とする．独立性の概念は非可換確率空間においても合成積を引き起こす．これにより中心極限定理や Poisson 極限を考えることにより，その独立性に付随した Gauss 分布および Poisson 分布が得られる．

先の１項で述べたように非可換確率空間に導入されたこれらの独立性の概念の間には，驚くほど密接した組合わせ論的類似性があることが知られている．それはモーメント・キュムラント公式における順序集合の分割との関連である．通常の独立性の概念によるモーメント・キュムラント公式は全ての分割に対応し，自由独立性の場合は非交叉分割にのみ制限される． さらに Boolean 独立性の場合には非交叉分割の特別な場合である，区間分割に制限が加えられることである．

通常の独立性と自由独立性を結ぶ１径数分布族(ｑ=1 が通常の分布，q=0 のとき自由確率論における分布を表すようなｑ－変形 ）に関する研究を行い，実際に q-Poisson 分布とそれを拡張して，通常の確率論と自由確率論とを補間するような q-モーメント･キュムラント公式に関する研究を行っている．これは分割の非交叉への制限を与える適当な交叉数の ｑ－数え上げ法を与えることにより実現された．更には最近，自由合成積とブール合成積を結ぶモーメント・キュムラント公式の変形を与える方法についてポーランドの Bozejko 氏の変形自由合成積を基に与えた．本研究では，上述のようにモーメント・キュムラント公式の変形に基づいた，独立性の変形を行い，このようにして導入された新たな独立性を実現するモデルを変形 Fock 空間で与えることにより，変形された独立性の解析的な性質（モーメント母関数とキュムラント母関数の関係等， Fourier 変換の変形にも相当する）を明らかにすることが目的である．更には，確率分布を特徴付ける量の変形が分布の変形に付随して得られるのではないかと思われる．そのための基礎固めも行いたい．

３．研究の方法

Wroclaw 大学の Bozejko 氏らにより導入された条件付き自由合成積は自由合成積にある種の制限を加えることであるが，これをモーメント・キュムラント公式の集合分割で表現すれば，非交叉分割の要素である各ブロックに荷重を与えることで実現可能である

ことが，研究代表者により示された．このことは，ブロックの荷重として任意の値を割り当てることが，形式的には可能であることを示唆する．また，このようにブロックに荷重を与えると言う手法は，非交叉分割に限ることなく，一般の分割の場合にも拡張可能である．実際，自由独立性とブール独立性を補間するｓ－変形自由合成積を実現する非交叉ブロックへの荷重の与え方を，全ての分割の場合に拡張することにより，通常の合成積とブール合成積を補間する変形合成積の構成が可能であることは研究代表者により示されている．

もちろん，このようにブロックに荷重を適当に与えて変形合成積を作った場合，問題となるのは，その合成積の正値性である．すなわち，任意の２つの確率分布の合成積が，本当に確率分布を与えるか否かである．一般に適当に荷重を与えたならば，正値性が保たれないのは容易に分かるが，ではどのような与え方が，正値性を保障するのか？という問題が自然に浮かぶ．しかし，これに関しては依然として解決されていない．しかし，任意の２つの確率分布の合成積の正値性が不明でも，対応する変形 Gauss 分布と Poisson 分布の正値性があれば，かなりリッチな議論は可能である．実際，通常の合成積とブール合成積を補間するｑ－合成積がそのよい例である．変形合成積の正値性へのアプローチとしは，その変形合成積を実現する変形 Fock 空間と，その上での標準的作用素 (canonical operator) の構成である．すなわち，自由合成積の場合に Voiculescu が行った全 Fock 空間とそれ上の R-級数（自由合成積に関するキュムラント母関数）に対応した標準作用素の変形を構成することである．少なくとも，変形された合成積を実現する変形 Fock 空間の構成ができたならば，生成作用素と消滅作用素の和を考えることにより，規格化された変形 Gauss 確率変数が得られる．これにより，Wick の公式を導くことにより，変形 Gauss 過程の議論は可能となる．

まず独立性の変形の概念が確立されたならば，それに基づいた中心極限定理および Poisson 極限によりそれら新たな独立性に付随した変形された Gauss 分布および Poisson 分布が自然に得られることになる．これらの分布を用いて Levy-Hincin 公式の議論が通常の確率論とパラレルに可能であることが十分期待される．実際，q－変形の場合には，既に q－無限分解可能な分布の議論が Aahus 大学の研究者等により行われている.任意の２つの確率分布についての正値性が得られなくても，無限分解可能な分布族に限れば，それらのクラスでの正値性は変形 Gauss 分布および変形 Poisson 分布の正値性用いて，Levy-Hincin 公式を経由して，得られることになる．

このように変形された合成積に関して任意の２つの分布の合成積の正値性が保障されていない場合であっても，その合成積に関する Gauss 分布と Poisson 分布の正値性があれば，無限分解可能な分布のクラスの議論は可能であり，さらには変形された無限分解可能な確率過程の研究が展開されるものと考えられる．実際，本研究の最終年度には無限分解可能な広い変形分布族 Meixner 分布族の解析に研究が発展していったことも付け加えておきたい．

４．研究成果

(1)　本研究において変形 Fock 空間上の重要な確率変数である Gauss 確率変数と，その Wick 公式を記述する対分割上の分割統計の研究と行った．特に連結成分数と呼ばれる分割統計と変形 Gauss 確率変数の関係について，この連結成分数が射影子による自由圧縮と呼ばれる手法で実現できることを Wroclaw 大学の Bozejko 教授と共に明らかにした．この結果はポーランド科学アカデミーの学術雑誌にて発表されている．以下の項目５の学術論文③がこれに対応する．

(2) 変形 Fock 空間上の重要な確率変数である Poisson 確率変数と，その高次モーメントを記述する分割統計の組合せ論への応用を行った．その結果，以前に構成した２変数変形 Fock 空間を用いて，今まで導出が煩雑であった非交差分割上の分割統計の数え上げ多項式の母関数の新たな導出方法を与え，今まで知られていた幾つかの分割統計の補間を与えることも可能となった．この成果は，国際的に評価の高い組合せ論関連雑誌に発表された．以下の項目５の学術論文②がこれに対応する．

(3) 最近，Dykema により自由独立性に基づく自由確率論の場合に，モーメントとマルティプリカティブ半不変量（加法的な場合のキュムラントに相当する量）の組み合わせ論的な考察がなされた．この結果，通常の集合の非交叉分割を若干拡張した，「絡み有り非交叉分割」 (non-crossing linked partitions) が重要な役割りを果たすことが導かれた．この拡張された分割の非交叉性は自由独立性に由来するものである．Dykema の導出した乗法的合成積に関する関係式は Voiculescu や Speicher による自由確率論における複合 Poisson 分布の構成手法と密接に関連することは知られていた．最近，申請代表者はこの「絡み有り非交叉分割」による関係式がさらに自由独立性の意味での無限分解可能分布の多くを包括する Meixner タイプの分布に密接に関連するこ

とを指摘し，non-crossing linked artitions と free Meixner 分布との関係を全 Fock 空間上で対応する作用素を構成することにより明らかにすることに成功した．これに関しては，以下の項目５の学会発表①，②が対応する．なお，これらに関する成果は国際的な学術論文雑誌に投稿すべく現在，成果の取り纏めを継続中でもある．

（4）古典的（通常の）確率論における微分可能な密度関数をもつ確率変数の Fisher 情報量は，いわゆるスコアー関数（log f(x))’= f’(x)/F(x)）の２乗平均として与えられる．これは，スコア関数の非可換類似が，ある Hilbert 空間上で上手く構成できたならば，その L2 ノルムとして Fisher 情報量が導入可能であるということを示唆する．本研究の一環として，研究代表者は自由 Fisher 情報量の Gauss 摂動が，条件付き分散の式でもって表示されることを示した．(通常の確率論でも同様の公式は発見されている)この公式に現れる条件付き分散は，ある条件付き期待値確率変数の２乗平均であり，Gauss 摂動をされた確率変数の Fisher 情報量はスコアー関数自身の非可換類似の構成が困難な場合でも導入可能であることを示している．この研究により，実際に，自由確率空間の場合には可能であることが示された．
この手法を用いれば，独立性の概念が陽に定義されないような，非可換確率空間において，スコアー関数の非可換類似が構成困難な場合でも，条件付き分散の公式をもって Gauss 摂動タイプの確率変数に対して Fisher 情報量が定義でき，infinitesimal approach (de Brujin 等式）を経由して，それに対応するエントロピーも構成可能になるのではないかと考えられる．これは，独立性の変形に基づく分布の変形が，分布の特徴量の変形までも構成できる可能性があることを示唆するもので，本研究の当初目的と密接に関連して派生した興味深い流れと考えられる．この研究結果については，以下の項目５の学術論文①ならびに学会発表③が対応する．

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Hiroaki Yoshida, Remarks on a semicircular perturbation of the free Fisher information, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **11**, 97－108, (2008)，査読有

② Fujine Yano, Hiroaki Yoshida, Some set partition statistics in non-crossing partitions and generating functions, Discrete Mathematics **307**, 127－140, (2007)，査読有

③ Marek Bozejko, Hiroaki Yoshida, Generalized q-deformed Gaussian random variables, Publication Banach Institute **73**. 127－140 (2006)，査読有

〔学会発表〕（計４件）

① Hiroaki Yoshida, Meixner operators on the q-Fock space and Schrodinger Algebra,
The 8th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Nov. 2008

② Hiroaki Yoshida, Remarks on non-crossing "linked" partitions and free Meixner law,
11thWORKSHOP:NON-COMMUTATIVE HARMONIC ANALYSIS WITH APPLICATIONS TO PROBABILITY, Banach Center, Poland, Aug. 2008,
招待講演

③ Hiroaki Yoshida, Alternative proofs of the free Fisher information and the free entropy power inequalities,
10thWORKSHOP:NON-COMMUTATIVE HARMONIC ANALYSIS WITH APPLICATIONS TO PROBABILITY, Banach Center, Poland, Aug. 2008.
招待講演

④ 吉田 裕亮，非可換確率空間における独立性の変形，日本数学会 2005 年度秋季総合分科会， 岡山 Sep. 2005.
特別講演

６．研究組織

(1)研究代表者
吉田 裕亮（YOSHIDA HIROAKI）
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・教授
研究者番号：10220667

(2)研究分担者
矢野 裕子（YANO YUKO）
お茶の水女子大学・理学部・アソシエートフェロー
研究者番号：10337462