

平成 21 年 6 月 8 日現在

研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2005～2008  
 課題番号：17540206  
 研究課題名（和文） Conley 指数理論に基づく力学系の位相的・計算的方法とそのカオスへの応用  
 研究課題名（英文） Topological and computational methods for dynamical systems based on the theory of Conley index  
 研究代表者  
 岡 宏枝（國府宏枝）(OKA HIROE (KOKUBU HIROE) )  
 龍谷大学・理工学部・教授  
 研究者番号：20215221

## 研究成果の概要：

位相的方法を精度保証付きの計算的方法と組み合わせて力学系の大域的構造と分岐について厳密な計算機支援解析の方法を開拓し以下のような問題を解決した．

- ・ 特異摂動的ベクトル場の Conley 指数理論の拡張
- ・ 非線形ダイナミクスの大域的構造や分岐を調べる位相的アルゴリズムの構築と Leslie モデルへの応用
- ・ Logistic 写像の臨界点近傍の外での一様双曲性に関する Mane 条件を満たすパラメータ集合を求める方法
- ・ Henon 写像の双曲性パラメータ集合を求める方法とその記号力学系の性質

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005年度	1,200,000	0	1,200,000
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,500,000	420,000	3,920,000

## 研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：力学系，分岐，カオス，計算的方法，Conley 指数

## 1. 研究開始当初の背景

申請者は日米共同研究（日本学術振興会 日米科学協力事業 共同研究（平成 13・15 年度） 研究代表者（日本側） 國府寛司，（米国側） Konstantin Mishaikow）に協力者として参加した。この日米共同研究の基本的な目的は、非線型力学系に対して Conley 指数理論に基づく位相的アプローチにより、その大域的構造を理解する新しい方法を確立し、それをいくつかの具体的な非線型現象の

解析に適用してその有用性を示すことであり、この中で力学系に対する計算的方法という本研究のアイデアが芽生えてきた。これは海外共同研究者 Mishaikow の研究グループが推進してきた、力学系の相空間の cube 分割に基づいて孤立不変集合とそのホモロジー Conley 指数を計算機によって求める方法の開発が進み、従来の方法では困難な力学系の大域的構造やその分岐を数学的厳密性を失うことなく計算機を援用して研究で

きるということである。また、本来は力学系の勾配的構造を調べるための手段であると考えられてきた connection matrix や transition matrix と呼ばれる Conley 指数に関係する行列が、ある見方をすると力学系のカオスの振る舞いを記号力学系に表現するために用いることが可能であるということに認識し、Conley 指数をカオスの力学系の研究に用いるという着想に至った。本研究計画はこのようなこれまでの研究成果の上に立ち、それをさらに発展させるものとして構想されたものである。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、Conley 指数と呼ばれる力学系の孤立不変集合に対する位相的不変量についての申請者らによるこれまでの研究成果に基づき、力学系の大域的振る舞い、また、カオスと呼ばれる複雑で予測不可能な現象のより良い理解を目指して、位相的方法に計算機を援用した「計算的」方法を組み合わせた新しい研究の方法を構築し、いくつかの具体的問題に適用してその有用性を明らかにすることである。

## 3. 研究の方法

本研究計画は、研究目的で述べた次の3つの課題に大別して行った。

(1) Conley 指数理論、特に孤立不変集合の間の勾配的結合の構造の位相的記述とその計算的方法

(2) 相空間の有限分割による記号化を用いたカオス力学系への計算的アプローチ：

(3) 2次関数族のカオスの振る舞いに対するパラメータ集合の測度の計算的方法による評価：

(1)では、力学系の孤立不変集合の Morse 分解と呼ばれる分解の各成分の間の勾配的な結合の構造を Conley 指数理論に基づいて記述し、さらにそれを計算機により計算する方法を確立することを目指した。

(2)では、いくつかの典型的状況において、力学系の相空間を分割し、それに対応した記号力学系によって力学系の大域的振る舞い、特にカオスの振る舞いを記述する可能性を探ることを目指す。より具体的には、Collins がその学位論文において定式化した trellis と呼ばれるものを Conley 指数との関係において見ることにより、力学系のカオスの振る舞いやそのパラメータによる変化を位相的方法と計算的方法を組み合わせる研究する。

(3)では、カオスの力学系の典型的例である2次関数の1パラメータ族を取りあげ、カオ

スの振る舞いの統計的側面を計算的アプローチで研究することを試みる。2次関数族では安定周期点が存在すればたとえカオスの振る舞いをする非可算集合が存在してもそれ以外のほとんどすべての軌道は安定周期点に引き込まれてしまうが、安定周期点がいなければ一般にはカオスの振る舞いをする軌道は正の測度で現れる。このようなカオスの統計的性質の違いは、ルベグ測度に関して絶対連続な不変測度の存在によって捉えられる。絶対連続な不変測度が存在するパラメータ集合はパラメータ空間のある開かつ稠密な部分集合の補集合に含まれるが、そのルベグ測度は正であることが Benedicks-Carleson によって示されているが、その定量的な評価のためには、より構成的な証明が必要である。このために我々は、まず Benedicks-Carleson の複雑な帰納法による証明を精密に検討し、有限個の不等式を証明することで帰納法のすべての段階が確かめられるように再構成する。次にその有限個の不等式を計算機を用いて定量的に検証することで、パラメータ集合の定量的な評価を得ることを目指した。

## 4. 研究成果

(1) Conley 指数理論、特に孤立不変集合の間の勾配的結合の構造の位相的記述とその計算的方法

・特異摂動的ベクトル場の Conley 指数理論を一般の次元の法双曲的な slow manifold に対して拡張した。そのために、まず、このような特異摂動的ベクトル場の Conley 指数が、速いベクトル場に対する Conley 指数と2次元以上の遅いベクトル場に対する Conley 指数へのホモロジー的な分解の構造理論を確立した。これは、遅いベクトル場の Conley 指数がわかれば、状況が slow manifold が1次元の場合に帰着されることを示しており、特異摂動的ベクトル場の新しい一般的な構造を示した点でも興味深い。(論文 )この理論の応用として、Gardner-Smoller によって与えられた prey-predator system で馬蹄力学系に対応した複雑さを持つ進行波解の存在を示した。この結果の証明は、この特異摂動的ベクトル場が本質的に記号力学系と対応付けられることを用いており、このようなクラスの力学系の多様な振る舞いの理解のための1つの有力な方法を与えたと言える。(論文 )

・数理モデルのひとつである Leslie model というパラメータ付きの常微分方程式を例に取り、その孤立不変集合の構造を、Rutgers 大学の Mischaikow, Pilarczyk らが開発したコンピュータソフト(Chomp)を用いて解析するもので、その方法を database schema として確

立し論文としてまとめた。(論文 )これは非線形系のダイナミクスの大域的構造やパラメータの変化に伴う分岐を調べる方法として、ホモロジー計算などの位相的方法に精度保証付き数値計算を組み合わせ、数学的に厳密で汎用性のあるアルゴリズムである。このアルゴリズムの概略は、写像として与えられる力学系  $f$  に対して、その相空間の有限グリッド分割  $G$  をとり、精度保証付き計算に基づく外近似によって、各グリッドに対してその中のすべての点の  $f$  による像と交わるすべてのグリッドを対応させることで、グリッド間の組み合わせ多価写像  $F$  を構成するものである。さらに、 $G$  を頂点の集合とし、 $G$  に対し、 $H = F(G)$  のとき、 $G$  から  $H$  に向かう辺を考えることで、 $F$  を有向グラフとして表すことができる。この研究で扱う位相的・計算的方法は、主に区間演算を用いた精度保証付き数値計算で得られたこの組み合わせ多価写像から、ホモロジー計算などを含む位相的な情報を計算するものであり、それによりダイナミクスについての数学的に厳密なさまざまな結果を得ることができる。これは従来の力学系理論の限界に新たな可能性を与える独自のアプローチであり、カオス的な系や大自由度系を含む多様な数理モデルに対する応用が期待される。また、Database Schema におけるサドル・ノード分岐、バウンダリ・クライシスの捉え方に関する定式化をした。これについては、Montana state univ. で発表し、論文を準備中である。(発表 )

(2) 連携研究者の荒井は、位相的方法と計算機を用いた精度保証付き数値計算を組み合わせていくつかの重要な結果を得た。論文では、微分同相写像によって定義される離散時間の力学系の双曲型周期点の安定多様体と不安定多様体が 2 次の homoclinic 接触を持つことを数学的に厳密に検証する方法を与えた。このような homoclinic 接触はカオス的アトラクタの存在を結論付ける重要な条件として盛んに理論的な研究がなされており、この方法は具体的な力学系に対する応用上の有用性が高い。実際、この方法を Henon 写像と呼ばれる 2 次元写像に適用して、いくつかのパラメータ値での homoclinic 接触の検証に成功した。荒井はさらに論文で、Henon 写像の双曲性パラメータ集合を位相的方法と計算的方法の組合せによって求めることにも成功した。双曲性パラメータでは力学系は構造安定であり、さらに双曲型力学系の一般論によりその大域的構造は原理的には記号力学系によって完全に記述される。このことから特に周期点の個数に関する情報や位相的エントロピーなどの力学系のカオスの振舞いについての特徴的な性質も得られる。

(3) 2 次関数族のカオス的振る舞いに対するパラメータ集合の測度の計算的方法による評価：区間上で定義された 1 次元写像の 1 パラメータ族に対して、臨界点近傍の外での一様双曲性に関する Mane の条件を満たすパラメータ集合を、グラフ・アルゴリズムと精度保証付き数値計算を用いて求める方法を与えた。また、それを実際に 2 次関数の場合に適用して、その一様双曲性の強さとパラメータの関係を示すいくつかの計算結果を得た。これらの結果は、1 次元写像の振舞いに対する統計的性質と密接に関係しており、これを基にして正の Lyapunov 数や絶対連続な不変測度の存在するパラメータ集合の計算機援用解析への第一歩となる結果であると考えられる。(論文 )

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

Z.Arai, H. Kokubu, S. Luzzatto, K. Mischaikow, H. Oka, P. Pilarczyk, A Database Schema for the Analysis of Global Dynamics of Multiparameter Systems, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 掲載確定, 査読有

S.Day, H.Kokubu, S.Luzzatto, K.Mischaikow, H. Oka, P. Pilarczyk, Quantitative hyperbolicity estimates in one-dimensional dynamics, Nonlinearity 21 (2008), 1967-1987. 査読有

Z.Arai, On hyperbolic plateaus of the Hénon map. Experiment. Math. 16 (2007), no. 2, 181-188. 査読有

M.Gameiro, T.Gedeon, W.Kalies, H.Kokubu, K.Mischaikow, H.Oka, Topological horseshoes of travelling waves for a fast-slow predator-prey system, J. Dyn. Diff. Eq. 19 (2007), 623-654. 査読有

H.Kokubu, D.Wilczak, P.Zgliczynski, Rigorous verification of the cocoon bifurcation in the Michelson system, Nonlinearity 20 (2007), 2147-2174. 査読有

Yutaka Ishii, Note on a paper by Kawasaki and Sasa on Bernoulli coupled map lattices, J.Phys.A39.no.45(2006),14043-14046. 査読有

Z.Arai, K.Mischaikow, Rigorous computations of homoclinic tangencies. SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 5 (2006), 280-292. 査読有

T.Gedeon, H.Kokubu, K.Mischaikow, H.Oka, The Conley index for fast-slow systems II: Multi-dimensional slow variable, J. Diff. Eq. 225 (2006), 242-307. 査読有

Hiroe Oka, Conley index theory for slow-fast systems: multi-dimensional slow manifold, Proceedings of International Conference on Differential Equations, Hasselt, Belgium July 22-26, 2003, World Scientific, 2005, 912-917.  
査読有

[学会発表](計3件)

H.Oka, Some bifurcations in the database of the Leslie model, Computational Topology and Dynamics Workshop, Montana State University, August 12, 2008

H.Kokubu, Bifurcation of Morse decompositions: A case study International Conference on Foundation of Computational Mathematics, City University of Hong Kong, Hong Kong, P.R.China, June 16-18, 2008

H.Oka, Application of topological singular perturbation theory to travelling waves in a predator-prey system, ", CIRM, Luminy, France July 4-8, 2005

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岡 宏枝 (國府宏枝)

(OKA HIROE (KOKUBU HIROE) ) )

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号 : 20215221

### (2) 連携研究者

荒井 迅 (ARAI ZIN)

北海道大学・創成科学共同研究機構・

特任助教

研究者番号 : 80362432

石井 豊 (ISHII YUTAKA)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号 : 20304727

國府 寛司 (KOKUBU HIROSHI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 50202057