

平成 21 年 6 月 18 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2005 年度 ～ 2008 年度

課題番号：17540207

研究課題名（和文） 多孔性媒質における多相流体现象モデルの数学解析

研究課題名（英文） Mathematical Analysis of Model Equations of Multi-Phase Flow Phenomena in Porous Media

研究代表者 浅倉 史興 (ASAKURA FUMIOKI), 大阪電気通信大学・工学部・教授 (研究者番号：20140238)

研究成果の概要：

1. 多孔性媒質における 3 相流（例えば、空気、油、水）の Stone モデル方程式系において、ほとんどの場合に、方程式が楕円型となる領域が存在することを証明した。これは、Stone モデル方程式系の数値計算においては、複雑な不安定性が発生することを示す。
2. 上記の Stone モデル方程式系を臍点の付近で近似する保存則系において、Liu-Oleinik 条件をみたく衝撃波で接続される 2 つの状態が、粘性衝撃波解で接続されない条件を与えた。これは、このような方程式系においては、衝撃波の許容条件が代数的には定まらないことを示す。
3. 空間 1 次元の等温流体の運動方程式において、初期状態が温度の異なる多数の相を持つ場合の初期値問題を研究し、温度の変化量と初期値の変動量の積が十分に小さいときの、非線形波（希薄波と衝撃波）の相互作用量の評価を得た。相が一つの場合に比べて、相互作用は非常に複雑になる。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2005 年度	1,200,000	0	1,200,000
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総計	3,300,000	390,000	3,690,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形現象，偏微分方程式，保存則，双曲系，多相流体，衝撃波，エントロピー

1. 研究開始当初の背景

以前の研究成果により、相境界（不完全圧縮衝撃波の 1 つ）の擾乱に対する安定性と、駆動条件のエントロピーを用いた物理学的な意味付けが明らかになったので、より一般

の双曲型保存則系に現れる不完全圧縮衝撃波状態の安定性を研究する準備ができた。また、ここで用いられた相境界と衝撃波の相互作用の評価方法は、一般の不完全圧縮衝撃波の解析に用いられることが可能であると考えられた。

また、2次流速密度をもつ多重双曲型保存則系の典型例とされる、Schaeffer-Shearerの第I, II類について、ユーゴニオ曲線のLax許容部分の決定と、粘性進行波の接続問題をほぼ解決し、それらに用いた平面曲線の古典理論と位相幾何学的な手法に習熟した。

一方、等エントロピー気体力学の運動方程式における非線形波の相互作用の研究により、大きな初期値に対して波面追跡法を用いることが可能となったので、多数の相を持つ等温気体方程式と一般の多向性(polytropic)気体力学方程式についても、波面追跡法を用いる準備ができた。

2. 研究の目的

多孔性媒質における多相流体现象においては、各流体相の流率が圧力の勾配に比例すると考えられ(Darcyの法則)、動学モデルは各流体相の質量保存則を表す偏微分方程式系である。この保存則系は、一般的には単純双曲系にならず、多重双曲点または楕円型領域が現れたりする場合がある。従って、双曲型保存則系の標準理論が適用できず、その枠外の波複合波や非古典的衝撃波が出現する。

この研究の目的のひとつは、とくに3相流体についてこれらの非古典波の許容条件を明らかにし、このような衝撃波を含む解の存在とその安定性を示すことである。従来の研究により、流速密度が状態量の2次式で表される多重双曲系モデルについては、直接的な代数計算により精密な結果が得られたので、今回は次のことを目標とする：(1) モデルに楕円型領域が現れるための条件の考察、(2) 楕円型領域が存在するときの、特性方向場の積分曲線とユーゴニオ曲線の大域的な考察、(3) 不完全圧縮衝撃波の許容条件の考察：a. 粘性極限、b. 粘・分散性極限の2方法を用い、これらにより得られた条件が、代数的条件に置き換えられるかを考察する。

また、多数の相を持つ等温気体方程式については、相境界が接触不連続となるので、衝撃波・希薄波と相境界との相互作用量を、Rimann問題の解を用いて評価する。相が一つの等エントロピー気体との違いは、希薄波と接触不連続との相互作用により、衝撃波が発生することである。相互作用の全体量が評価されれば、波面追跡法を用いて大域解の存在が示される。このような、多相等温気体方程式の研究に、エントロピー関数の評価を加えれば、多向性気体力学方程式の大域解の構成も可能となる。

この研究の特色は、楕円型領域が現れる場合の保存則系において、安定な衝撃波が存在するための条件を考察することである。とくに、粘性極限、粘・分散性極限のような解析的な条件と、駆動条件のような代数的な条

件との関係を解析し、駆動条件に置き換わる場合にそれを用いて安定性を考察する点である。また、それらの解析において、モース理論、葉層構造のような位相幾何学的な手法と平面曲線の古典理論を用いて、特性方向場とユーゴニオ曲線の大域的な考察を行うことがこの研究の独創的な点である。種々のモデル保存則系について、それと適合する粘・分散係数が定まり、粘・分散極限で得られた解がみだす駆動条件が得られることが予想される。また、その駆動条件で得られる解は安定であることが期待される。従来の、楕円型領域を含む保存則系の研究は、ほとんどが数値計算に依るもので、本研究のような理論的な数学解析の意義は大きい。

従来、波面追跡法は小さな初期値のみについて用いられてきたが、大きな初期値に関して用いる試みは、研究代表者による等エントロピー気体方程式の大域解の構成が最初である。

3. 研究の方法

はじめに、多孔性媒質における多相流体モデルに楕円型領域が現れる場合の条件と、孤立した多重双曲点が見れるための条件を考察を考察し、さらに、楕円型領域が存在するときの、特性方向場の積分曲線とユーゴニオ曲線の大域的な考察を行う。方法は平面曲線の古典理論と位相幾何学的な方法による。具体的には

(1) 3相流体モデルにおける2相流曲線の研究：2相流曲線上では方程式系が単純化されると共に、楕円型領域は2相流曲線に囲まれることが知られている。また、すべての2相流曲線が1点で交わった点が(孤立した)多重双曲点である。したがって、2相流曲線の解析により、多重双曲点・楕円型領域の存在、個数、境界の滑らかさ等を知ることができる。

(2) ユーゴニオ曲線の大域的な研究：基本波面多様体において基点を固定した切り口を、ランキン-ユーゴニオ条件をみだす状態面へ射影した曲線がユーゴニオ曲線である。したがって、基点と多重双曲点の周りで複雑な様相を示す。この解析には、線形偏微分方程式の多重双曲点を扱う方法が用いられる。

(3) ユーゴニオ曲線の2次分岐の研究：ユーゴニオ曲線は、いわゆる「音速軌跡」の上で2次分岐をおこす。このときに、どの方向の枝が安定的であるかは、代数的に定めることはできない。また、その点においては、希薄波曲線とユーゴニオ曲線が接するので、複合波が出現し、それが安定となることも起こる。ここでは、基点と粘性進行波で結び得る状態が存在する方向安定であるので、このような接続が可能であるような幾何学的条

件を求めることが重要である。したがって、常微分方程式の自励系の接続問題を扱う手法が必要となる。

多相等温気体方程式については

(4) 衝撃波・希薄波と相境界についてのRimann問題を考察し、局所相互作用評価を導く。

(5) 以前の研究で等エントロピー気体方程式の近似解に対して構成した、衝撃波の径路分解(path decomposition)を多相等温気体方程式の近似解についても構成する。

4. 研究成果

2005年度：

(1) 多孔性媒質における3相流体现象モデルの双曲性：3相流（例えば、空気、油、水）のStoneモデル方程式系においては、ほとんどの場合に、方程式が楕円型となる領域が存在することを証明した。この方程式系においては、疑似2相流曲線が3つ存在し

(Marchesin-Medeirosの結果)、ほとんどの場合に、それらに囲まれた領域ができる。その領域の中に、必ず楕円型となる部分があり、疑似2相流曲線は楕円型部分の境界を含む。3つの疑似2相流曲線が1点で交わるとき、その交点は臍点で、方程式は多重双曲系となる。また、表面張力を考慮したStoneモデル方程式系には、境界で退化する拡散項が現れるが、その拡散項は対称化できることを示した

(2) Buckley-Leverett方程式の解の漸近安定性：Buckley-Leverett方程式は、保存則方程式の形で、多孔性媒質における2相流体现象モデルの代表である。この保存則の流速は保存量の凸関数でないので、解の漸近形においては、複合波(composite wave)が現れる。初期値が $x \leq -A$, $x \geq A$ において、それぞれ流体1, 流体2であるとき、解は有限長さの部分(衝撃波を含む)を除き、希薄波に漸近することを示した。希薄波部分は、時間的に一定の割合で広がるので、希薄波の大きさを規格化すると、有限長さの部分は相対的に0に近づき、解は複合波に漸近することが分かる。証明はDafermos氏の波面追跡法による近似解の希薄波に相当する部分を評価することによる。

(3) 多向性(polytropic)気体の運動方程式の初期値問題：1次元モデル方程式において、断熱係数を γ とするとき、 $(\gamma-1) \times$ 初期値

(圧力, 速度, エントロピー)が十分に小さければ、時間的大域解が存在することを、波面追跡法を用いて証明した。解の存在については、T.-P. Liu氏がすでにGlimm差分法を用いて証明しているが、波面追跡法を用いることにより、漸近安定性も同時に導かれる。また、Glimm差分法による証明に必要な補題

のいくつかが大きく簡略化される。さらに、解の一意性の証明(Bressan理論)に至る道が開ける

2006年度：

(1) 多相流体现象モデル方程式の数学解析：空間1次元の等温流体の運動方程式において、初期状態が温度の異なる多数の相を持つ場合の初期値問題を研究し、温度の変化量と初期値の変動量の積が十分に小さいならば時間大域的な弱解が存在することを証明した(D. Amadori, A. Corli 両氏との共同研究)。すべての相に共通するリーマン不変量は存在しないので、最も低温な相のリーマン不変量を用いて、各相の状態量を評価した。局所評価は、Amadori-Corliのアイディアによる計算を、リーマン不変量を用いて行う。解の存在証明は、波面追跡法によるが、近似解に径路(path)とその上の振幅の定義をより簡明にして大域評価を行った。これは、2005年度に、多向性理想気体の運動方程式の数学解析で用いた方法である。多向性理想気体では、衝撃波の前後でエントロピー変化が起こるが、等温多相流体では、それに相当する変化がないので、解析は幾分か易しくなる。

(2) 洪水波モデル方程式の数学解析：傾斜角が一定の水路上の流体の運動方程式について、初期値問題を研究した。方程式は双曲型平衡則系で、双曲系の部分は気体定数が2の等エントロピーモデル方程式で、平衡則は緩和型(relaxation)である。フルード数が2より小さければ、緩和型方程式の理論により、十分なめらかな初期値に対しては時間的大域解が得られているが、緩和極限をとると、解に不連続性が現れるので、不連続性を許容する弱解の存在定理が必要とされている。本年度の研究においては、Glimm差分法と時間方向に分割差分法を用いて、弱解の存在定理を得た。分割差分で平衡則部分を近似的に解く過程において、従来から用いられてきた陽的差分の代わりに、その度に非線形方程式を解いて近似解を構成する、陰的差分を導入することにより、その過程において、近似解の変動量が増えないことが証明される。

2007年度：

(1) 多相流体现象モデル方程式の数学解析：昨年度に引き続いて、空間1次元の等温流体の運動方程式において、初期状態が温度の異なる多数の相を持つ場合の初期値問題を研究し、2006年度の結果のなかの、大域解が存在する条件に関する、温度の変化量と初期値の変動量の積についての上限を評価した(D. Amadori, A. Corli 両氏との共同研究)。この評価により、大域解の存在条件を簡明にすることができた。

(2) 2x2保存則系において、Liu-Oleinik条

件をみたすが、粘性衝撃波解の存在しない例：臍点をもたない保存則系においては、Liu-Oleinik 条件を満たす衝撃波は粘性衝撃波により接続されることが期待される。今年度の研究で、臍点をもつ保存則系においては、これが必ずしも成立しないことを示した。臍点を持つ2次の流束においては、medianといわれる臍点をとおる3つの直線が存在する。1つの状態をmedian上にとると、その状態から発する Hugoniot 曲線は臍点の向こう側で、同じ median と交わる。その点の近傍において Hugoniot 曲線上の状態を適当に選ぶと、Liu-Oleinik 条件をみたすが、粘性衝撃波が存在しない例が構成される。この現象は、median 上には、不足圧縮 (undercompressive) な粘性衝撃波解が存在することと、Hugoniot 曲線が臍点の向こう側で交わる点は2次分岐点であることが原因となっている。また、一昨年度の研究により、最初の状態が、median 上にないときは、臍点をもたない場合と同様であることが分かっているので、median 上での状態は、力学系としての構造不安定性を引き起こすことも示している。

2008 年度：

(1) 多相流体现象モデル方程式の数学解析：平成 18, 19 年度に引き続いて、空間 1 次元の等温流体の運動方程式において、初期状態が温度の異なる多数の相を持つ場合の初期値問題を研究した (D. Amadori, A. Corli 両氏との共同研究)。本年度は、局所相互作用評価の精密化をおこない、特に生成される希薄波の大きさの評価を得た。昨年度までは、径路分解の方法と世代番号により、衝撃波の大きさを評価し、それをを用いて希薄波の大きさを評価していたが、この局所評価により、希薄波についても世代番号を導入し、希薄波の全体量を直接に評価することができた。また、Glimm 汎関数に現れる係数の最適形を得ることができた。これらの評価により、従来より自然な条件の下で、大域解の存在を証明することができた。

(2) 洪水波モデル方程式の数学解析：平成 18 年度に引き続いて、傾斜角が一定の水路上の流体の運動方程式について、初期値問題を研究した (K. Trivisa 氏との共同研究)。方程式は緩和型 (relaxation) 双曲型平衡則系で、双曲系の部分は気体定数が2の等エントロピーモデル方程式である。フルード数が2より小さいことが、緩和型方程式の理論における劣特性条件と同値である。本年度の研究で、平衡解の近傍では、劣特性条件と強凸なエントロピー関数の存在が同値であることが分かった。これにより、緩和型双曲型方程式の川島理論を、洪水波モデル方程式に適用できることが分かる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

[1] F. Asakura, M. Yamazaki, Viscous shock profiles for 2x2 systems of hyperbolic conservation laws with an umbilic point, Journal of Hyperbolic Differential Equations, Vol. 6, 2009 掲載予定, 査読有

[2] F. Asakura, M. Yamazaki, Viscous shock profiles for 2x2 systems of hyperbolic conservation laws with quadratic flux functions, 数理解析研究所講究録 1631, 2009, 47-59, 査読有

[3] F. Asakura, M. Yamazaki, Survey of admissible shock waves for 2x2 systems of conservation laws with an umbilic point, Advanced Studies in Pure Mathematics, 47-1, 2007, 87-97, 査読有

[4] M. Belarbi, T. Mandai, M. Mechab, Global Fuchsian Goursat Problem in the Class of Holomorphic-Gevrey Functions, Osaka J. Math. 44-2, 2007, 255-283, 査読有

[5] R. Ashino, K. Fujita, T. Mandai, A. Morimoto, K. Nishihara, Blind source separation using time-frequency information matrix given by several wavelet transforms, Information: An International Journal, 10-5, 2007, 555-568, 査読有

[6] F. Asakura, M. Yamazaki, Existence of Viscous Profiles for Conservation Laws with an Umbilic Point, "Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications", Yokohama Publishers, Vol. 1, 2006, 279-286, 査読有

[7] F. Asakura, Wave-front tracking for the equations of non-isentropic Gas Dynamics, 数理解析研究所講究録 1495, 2006, 78-91, 査読有

[学会発表] (計4件)

F. Asakura, Path decomposition method in wave-front tracking scheme, Himeji Conference on Partial Differential Equations, 2009年2月20日, イーグレ姫路, 姫路

30103344)

(3) 連携研究者

なし

F. Asakura, Viscous shock profiles for 2x2 systems of hyperbolic conservation laws with quadratic flux functions, 2008年7月12日, 京都大学数理解析研究所研究集会「流体と気体の数学解析」

F. Asakura, Wave-front tracking method for the equations of non-isentropic Gas Dynamics, July 2006, 10th International Conference on Hyperbolic Problems -Theory, Numeric and Application, July 2006, ENS Lyon, France

F. Asakura, Wave-front tracking for the equations of non-isentropic Gas Dynamics, 京都大学数理解析研究所研究集会「流体と気体の数学解析」2005年7月12日

〔図書〕(計1件)

F. Asakura (Chief Editor), “Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications”, Yokohama Publishers, August 2006, 国際会議: 10th International Conference on Hyperbolic Problems - Theory, Numerics and Applications - (Osaka) の論文集. I, II 2巻, 合計866ページ, 掲載論文数106編.

〔産業財産権〕

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

〔その他〕

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

浅倉 史興 (ASAKURA FUMIOKI), 大阪電気通信大学・工学部・教授 (研究者番号: 20140238)

(2) 研究分担者

萬代 武史 (MANDAI TAKESHI), 大阪電気通信大学・工学部・教授 (研究者番号: 10181843)

坂田 定久 (SAKATA SADAHISA), 大阪電気通信大学, 医療福祉工学部・教授 (研究者番号: 60175362)

山原 英男 (YAMAHARA HIDEO), 大阪電気通信大学・工学部・准教授 (研究者番号:)