

令和 4 年 6 月 2 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17H02826

研究課題名(和文) モデル縮減に基づく新世代高速構造保存数値計算法の創出

研究課題名(英文) Development of new efficient structure-preserving numerical methods based on model reductions

研究代表者

松尾 宇泰 (Matsuo, Takayasu)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号：90293670

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,280,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、モデル縮減技法を採り入れた新しい構造保存解法の創出を目指した。その結果、シンプレクティックモデル縮減の有効性の検証、それを散逸系に拡張した新しい構造保存モデル縮減法の開発など、目指したとおりの構造保存的モデル縮減手法が得られた。またその過程でポアソン括弧・南部括弧に基づく新しい構造保存解法の開発、動的モード分解など新しいモデル縮減技法に関する理論解析など、いくつかの基礎的知見も得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数値解析、とりわけ微分方程式に対する構造保存解法は、現代の科学・工学を支える重要な技術である。本研究は、拡大を続ける現代科学・工学の諸問題に対処するために、この技術をモデル縮減の技法を採り入れて進化させるものである。これにより、従来、既存の構造保存解法では解けなかった大規模問題が解かれることが期待される。また、構造保存解法や動的モード分解などに関する基礎的知見も得られ、数値解析学の前進に寄与した。

研究成果の概要(英文)：In this research plan, we aimed at the development of a new structure-preserving numerical methods incorporating with model reduction techniques. As results, we have verified the effectiveness of some symplectic model reduction techniques, and obtained a new structure-preserving method for dissipative systems with model reduction mechanism, as desired. In addition to that, in search of such new methods, we have obtained several new fundamental tools including a new structure-preserving method based on Poisson and Nambu brackets, and a rigorous theoretical analysis for dynamical mode decompositions.

研究分野：数値解析

キーワード：数値解析 構造保存解法 モデル縮減

### 1. 研究開始当初の背景

現代科学・工学では、微分方程式の数値計算に基づくシミュレーションが必須であるが、扱う問題が飛躍的に大規模化する一方、ムーアの法則の終焉により、並列(高性能)計算のみに頼った性能向上は以前ほど望めなくなっている。そのために、数理的な手法により解ける問題クラスを拡大することの重要性が再び重視されるようになってきている。

そのような数理手法には例えば、「構造保存数値解法：方程式の数理構造を活用することで物理的に適切な数値解を保証する手法」、および「モデル縮減法：大規模方程式を低次元近似することで数理的に計算量を削減する手法」などがある。前者は Euler 以来続いた微分方程式に対する汎用解法の歴史を塗り替えるべく 1990 年代から興った新しい解法構成の流れであり、現代数値解析学の主軸のひとつとなっている技法である。一方後者は、数値解析学のみならず統計学などでも重視される技法で、高次元空間内の情報を低次元空間に落とし計算量を削減して解析を可能とするためのものである。以上の技術はそれぞれ重要なものであるが、これらを組み合わせる研究はまだ極めて黎明期にあった。

### 2. 研究の目的

以上の背景を踏まえ、本研究は、上記の 2 大トレンド、「構造保存数値解法」、および「モデル縮減法」を組み合わせ、数理的な手法により、物理的に正しい数値シミュレーションを高速に行う、新しい数値計算法の枠組を創出することを目指したものである。また、この試みの過程で、構造保存解法およびモデル縮減技法における基礎技術の拡張も併せて目指す。

### 3. 研究の方法

(1) モデル縮減付き構造保存解法の枠組の構築：既存のモデル縮減技法は、そのままでは構造保存解法が尊重する方程式の数理構造を一般には破壊してしまい、モデル縮減と構造保存を両立させることができない。しかしごく僅かな例に於いて、これらを両立させられるケースも存在することが分かっている。そこでそれらのケースの検証から始め、そこから指導原理を抽出して一般的な構造保存的モデル縮減技法を構成することを目指す。

(2) 上記のための構造保存解法およびモデル縮減技法における基礎技術の拡張：(1)を希求する過程で、構造保存解法およびモデル縮減技法そのものにおいて、一定の拡張が必要である可能性があり、それを目指す。

### 4. 研究成果

(1) シンプレクティックモデル縮減法の検証：Peng--Mohseni (2016) によって与えられたシンプレクティックモデル縮減は、Hamilton 系に対して、そのシンプレクティック構造を保ったままモデル縮減を行う手法を与える。これは数少ない例外的な構造保存的モデル縮減技法であり、本研究では本手法を数値的に評価すると共に、やや分かりにくい指導原理を一般化逆行列を用いた形式で抽出した。その結果、本手法は数値的にも非常に優れていることが確認され、また、抽出した指導原理に着目することで、Hamilton 系以外の系に対しても類似手法が構成可能であることが示唆された。

(2) 散逸系に対する構造保存的モデル縮減法の開発：(1)で抽出した指導原理に基づき、散逸的勾配系に対して、その勾配構造を壊さずにモデル縮減を行う技法の開発に成功した。これは我々の知る限り、世界で初めての、散逸系に対する構造保存的モデル縮減技法である。この技法を用い Cahn--Hilliard 方程式など数値的に解きにくい偏微分方程式をモデル縮減付き構造保存解法で解き、実際に有意であることを確認した。なお、本研究で開発したこの技法は散逸系だけでなく保存系にも適用可能である。

(3) Poisson 括弧・南部括弧に基づく構造保存解法：Hamilton 系を拡張した Poisson 系に対しては、Poisson 括弧が系の数理構造を適切に記述することがよく知られており、それに着目した構造保存解法もいくつか存在した。しかしながら、Poisson 括弧そのものの離散版を考える、ある意味で最も自然な構造保存解法はこれまで構成されていなかった。本研究では、この未解決問題を肯定的に解決し手法を与えた。また、通常 Hamilton 系を、複数の Hamiltonian を持つ系へと拡張した南部力学系においても、南部括弧を離散化することで複数の Hamiltonian を保存する構造保存解法が構成可能であることを示した。

(4) 動的モード分解の数学解析：モデル縮減で通常行われる低次元近似は、静的な(固定された)部分空間への射影である。しかしながら時間依存する系においては、この部分空間を動的に変化させる方が効率が良い可能性がありうる。動的モード分解はこの視点から開発された動的なモ

デル縮減技法の一種であり、非線形システムの解析などで盛んに用いられている。しかしながら動的モード分解は経験的にその有用性が知られている一方で、その理論保証は未解明の部分があった。本研究では、線形計算・統計・確率的な観点からいくつかの新しい理論保証を与えた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 S. Sato and T. Matsuo	4. 巻 358
2. 論文標題 On spatial discretization of evolutionary differential equations on the periodic domain with a mixed derivative	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Comput. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 221--240
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.cam.2019.03.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Sato, K. Oguma, B.-F. Feng, and T. Matsuo	4. 巻 361
2. 論文標題 A robust numerical integrator for the short pulse equation near criticality	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Comput. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 343--365
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.cam.2019.04.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T. Ogita and K. Aishima	4. 巻 36
2. 論文標題 Iterative refinement for symmetric eigenvalue decomposition II: clustered eigenvalues	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Jpn. J. Ind. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 435--459
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13160-019-00348-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Y. Morijiri, K. Aishima and T. Matsuo	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Extension of an error analysis of the randomized Kaczmarz method for inconsistent linear systems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Aishima Kensuke	4. 巻 311
2. 論文標題 On convergence of iterative projection methods for symmetric eigenvalue problems	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Comput. Appl. Math.	6. 最初と最後の頁 513 ~ 521
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cam.2016.08.035	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 相島健助
2. 発表標題 逆一般化固有値問題に対する二次収束解法とその収束理論
3. 学会等名 日本応用数理学会 研究部会 連合発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 相島健助
2. 発表標題 動的モード分解のノイズ除去の効果に対する統計解析
3. 学会等名 日本応用数理学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 相島健助
2. 発表標題 動的モード分解に対する確率解析
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所 研究集会「諸科学分野を結ぶ基礎学問としての数値解析学」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 杉淵 優也, 松尾 宇泰, 佐藤 峻
2. 発表標題 南部括弧に基づく構造保存数値解法に関する一考察
3. 学会等名 日本応用数理学会2018年研究部会連合発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 柳澤 広大, 松尾 宇泰
2. 発表標題 散逸型微分方程式に対する各種モデル縮減手法の検討
3. 学会等名 日本応用数理学会2018年研究部会連合発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 T. Matsuo and Y. Miyatake
2. 発表標題 Toward Modern Scientific Computations Based on Structure-Preserving Methods
3. 学会等名 SIAM PP 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松尾宇泰
2. 発表標題 物理系のシミュレーションにおける構造保存数値解法について
3. 学会等名 核融合研MHD研究会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 S. Sato and T. Matsuo
2. 発表標題 On spatial discretization of evolutionary differential equations on the periodic domain with a mixed derivative
3. 学会等名 SciCADE2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T. Matsuo
2. 発表標題 Some structure-preserving discretizations of generalized Ostrovsky equation
3. 学会等名 SciCADE2017 ( 国際学会 )
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 佐藤峻, 松尾宇泰
2. 発表標題 混合微分を含む発展方程式の空間離散化について
3. 学会等名 日本応用数理学会2017年度年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 T. Matsuo
2. 発表標題 On some finite-difference based structure-preserving methods for partial differential equations
3. 学会等名 EASIAM 2017 ( 招待講演 ) ( 国際学会 )
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担 者	相島 健助  (Aishima Kensuke)  (40609658)	法政大学・情報科学部・准教授   (32675)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年
京都大学数理解析研究所 研究集会「諸科学分野を結ぶ基礎学問としての数値解析学」	2019年～2019年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------