

令和 3 年 6 月 24 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17H02833

研究課題名(和文) シンプレクティック代数幾何の構築

研究課題名(英文) Towards the theory of Algebraic Symplectic Geometry

研究代表者

並河 良典 (Namikawa, Yoshinori)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：80228080

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,300,000円

研究成果の概要(和文)：シンプレクティック構造をもった代数多様体は、代数幾何、幾何学的表現論、数理物理などで重要な働きをする。こうした対象を特異点を込めて考えることは、高次元代数多様体の立場からは自然である。本研究では、錐的シンプレクティック多様体の構造を調べた。具体的な成果としては、複素半単純リー環のベキ零軌道閉包の有限被覆を、錐的シンプレクティック多様体の中で特徴付けたこと。さらに、リー環が古典型の場合に、ベキ零軌道の普遍被覆に付随した錐的シンプレクティック多様体の良い部分的特異点解消(Q-分解的末端化)を具体的に構成し、その個数を明示的にあらわす公式を見出したことである。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の対象である、錐的シンプレクティック多様体は、代数幾何と幾何学的表現論の結びつける働きをするものであるが、代数幾何からアプローチした研究は、ユニークなものである。ここで得られた成果は、最近、幾何学的表現論の研究者たちに多く使われるようになった。たとえば、シンプレクティック双対性とよばれる現象が多くの研究者の注目を浴びているが、研究代表者のおこなった研究は、その中でも重要な働きをしている。

研究成果の概要(英文)：Complex algebraic varieties with holomorphic symplectic forms play important roles in algebraic geometry, geometric representation theory and mathematical physics. It is natural to treat those objects admitting singularities. In our research, we have studied "conical symplectic varieties". As concrete results, we first characterized finite coverings of nilpotent orbit closures of a complex semisimple Lie algebra among conical symplectic varieties. Next, we gave an algorithm for constructing a good partial resolution (so called a Q-factorial terminalization) of a conical symplectic variety associated with the universal covering of a nilpotent orbit of a classical Lie algebra. We also counted the number of different Q-factorial terminalizations.

研究分野：代数幾何

キーワード：シンプレクティック代数多様体 錐的シンプレクティック多様体 ポアソン変形 双有理幾何 シンプレクティック特異点解消 ベキ零軌道

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

シンプレクティックアファイン代数多様体で、良い C^* -作用を持ったものを錐的シンプレクティック多様体とよぶ。錐的シンプレクティック多様体やそのシンプレクティック特異点解消は、代数幾何のみならず、幾何学的表現論や数理物理などにも登場して、活発な研究がなされている。研究代表者は、双有理幾何やポアソン変形の立場から、錐的シンプレクティック多様体を研究してきた。錐的シンプレクティック多様体は、2次元のクライン特異点の高次元化とみなすことができる。クライン特異点の半普遍変形が、複素半単純リー環のスロドウィー切片を用いて構成でき、さらに、その同時特異点解消を作れることは有名な事実である。研究代表者は、こうした結果を、ポアソン変形を用いて、錐的シンプレクティック多様体に一般化することに成功した。また、その後、錐的シンプレクティック多様体の有限性定理を証明して、分類問題にも着手した。錐的シンプレクティック多様体の重要な不変量として、極大ウエイトというものがある。このとき、複素半単純リー環のべき零軌道閉包で正規な多様体は、極大ウエイト 1 の錐的シンプレクティック多様体として特徴付けられる。他にも、錐的シンプレクティック多様体の非特異部分の基本群は重要な研究対象であるが、代数的基本群が有限であるという部分的結果も得ていた。

2. 研究の目的

シンプレクティック形式をもった代数多様体は、数学のいろいろな場面に登場する。コンパクトな対象は、いわゆるコンパクト超ケーラー多様体とよばれるもので、代数多様体の分類理論や数理物理で重要な役割を果たす。一方、コンパクトでない対象には、点のヒルベルト概型、旗多様体、べき零多様体などがあり、代数幾何や幾何学表現論などで、頻りに現れる。この研究では、後者のほうに重点を置いて、その構造を研究する。特に、錐的シンプレクティック多様体を、ポアソン変形や双有理幾何を用いて研究する。

3. 研究の方法

錐的シンプレクティック多様体の例として、複素半単純リー環のべき零軌道の閉包やべき零錐以外にも、べき零軌道閉包の有限被覆、超トーリック多様体、スロドウィー切片、旗多様体、超曲面型シンプレクティック多様体など面白い例がいくつも知られている。これらを、錐的シンプレクティック多様体の中で何らかの形で特徴付けることが1つの目標である。一方、錐的シンプレクティック多様体 X がシンプレクティック特異点解消 Y を持ったとすると、第2コホモロジー $H^2(Y, \mathbb{C})$ が Y の普遍ポアソン変形のパラメーター空間になる。このとき、 $H^2(Y, \mathbb{C})$ には、 X から決まるある種のワイル群 W が作用する。錐的シンプレクティック多様体 X の普遍ポアソン変形のパラメーター空間は、 $H^2(Y, \mathbb{C})$ を W で割った空間に一致する。 $H^2(Y, \mathbb{R})$ には、自然な部屋割り構造が入り、部屋の個数を W の位数で割った数が、 X の相異なるシンプレクティック特異点解消の個数である。したがって、様々な例に対して、ワイル群 W とその作用を具体的に記述することが2つ目の目標となる。

4. 研究成果

i) べき零軌道閉包の有限被覆の特徴付け:

錐的シンプレクティック多様体の座標環を R とする。 R は次数つけられた環であるが、 R が R_{-1} で生成されるときは、複素半単純リー環のべき零軌道閉包になる。しかし、べき零軌道閉包は必ずしも、正規ではないので、その正規化の座標環は必ずしも、 R_{-1} で生成はされない。また、べき零軌道の基本群が自明でない場合には、その有限被覆に付随した錐的シンプレクティック多様体が存在する。これらの多様体の特徴付ける目的で、次の結果を得た (A characterization of nilpotent orbit closures among symplectic singularities II, arXiv 1707.02825)

錐的シンプレクティック多様体 X のシンプレクティック形式のウエイトを l としたとき、 R_{-l} で生成された R の部分環を $R(l)$ とする。もし、 R が $R(l)$ -加群として有限生成であれば、 X は、ある複素半単純リー環の有限被覆である。

ii) ベキ零軌道閉包の普遍被覆に付随した錐的シンプレクティック多様体の Q-分解端末化:

複素半単純リー環のベキ零軌道の基本群は有限である。そこで、ベキ零軌道の普遍被覆をとり、それを、ベキ零軌道閉包の上の有限被覆に拡張する。このとき得られるアファイン正規多様体 X は、錐的シンプレクティック多様体になる。 X は一般には、シンプレクティック特異点解消を持たないが、その代替物として良い部分的特異点解消をもつ。これを、 X の Q-分解的末端化とよぶ。ベキ零軌道の閉包自身の Q-分解的末端化の具体的な構成は、研究代表者や、Baohua Fu によってなされていたが、有限被覆に関しては、長らく手がついていなかった。本研究では、古典型複素リー環のベキ零軌道の普遍被覆に付随した X に対して、Q-分解的末端化を与える具体的なアルゴリズムを発見した。

結果の系として、 X がいつシンプレクティック特異点解消をもつかも判定できる。

詳細は、プレプリント : Birational geometry for the covering of a nilpotent orbit closure, arXiv 1907.07812) として発表した。

さらに、その続編 : Birational geometry for the covering of a nilpotent orbit closure II, arXiv 1912.01729) では、一般の複素半単純リー環に対して、 X の Q-分解的末端化が与えられたとき、相異なるものが何個存在するかの、明示的公式を得た。 X のワイル群を具体的に記述することが、証明の鍵になる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y, Namikawa	4. 巻 370
2. 論文標題 A characterization of nilpotent orbit closures among symplectic singularities	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Math. Ann.	6. 最初と最後の頁 811-818
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-017-1572-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Namikawa	4. 巻 74
2. 論文標題 Fundamental groups of symplectic singularities,	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Adv. Stud. Pure Math.	6. 最初と最後の頁 321-334
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件（うち招待講演 17件 / うち国際学会 13件）

1. 発表者名 並河良典
2. 発表標題 べき零軌道の普遍被覆と双有理幾何
3. 学会等名 代数・幾何・解析ワークショップ鹿児島 (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 並河良典
2. 発表標題 Birational geometry for the covering of a nilpotent orbit closure
3. 学会等名 東大-京大合同代数幾何セミナー (online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 並河良典
2. 発表標題 Universal coverings of nilpotent orbits and birational geometry
3. 学会等名 京大表現論セミナー (online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 並河良典
2. 発表標題 べき零軌道の普遍被覆と双有理幾何
3. 学会等名 代数学シンポジウム (online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshinori Namikawa
2. 発表標題 Symplectic singularities and nilpotent orbits
3. 学会等名 Symplectic Representation Theory, CIRM, Marseille, France (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Namikawa
2. 発表標題 Symplectic singularities and nilpotent orbits
3. 学会等名 Japanese-European Symposium on symplectic varieties and moduli spaces, ETH, Zurich, Switzerland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Namikawa
2. 発表標題 Birational geometry for the covering of a nilpotent orbit closure
3. 学会等名 Lecture Series in Algebraic Geometry, -Group action and Symplectic algebraic geometry, Morning Center of Mathematics, Chinese Academy of Science, Peking, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y, Namikawa
2. 発表標題 Symplectic singularities and nilpotent orbits
3. 学会等名 Complex Geometry and Lie groups, Florence, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y, Namikawa
2. 発表標題 Symplectic singularities and nilpotent orbits
3. 学会等名 International Conference on geometric representation theory and symplectic varieties, Univ. of Notre Dame, USA (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y, Namikawa
2. 発表標題 Poisson deformations and birational geometry
3. 学会等名 Poisson 2018 -International Conference on Poisson geometry, Fields Institute, Canada (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y, Namikawa
2. 発表標題 Symplectic singularities and nilpotent orbits
3. 学会等名 Kinosaki Algebraic Geometry Conference 2018, Kinosaki, Japan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Y, Namikawa
2. 発表標題 Introduction to Poisson geometry for algebraic geometers
3. 学会等名 Winter school on Poisson structures in Algebraic Geometry, Busan, Korea (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Y. Namikawa
2. 発表標題 Towards the classification of symplectic singularities
3. 学会等名 Japanese-European Symposium on symplectic varieties and moduli spaces, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Namikawa
2. 発表標題 Towards the classification of symplectic singularities
3. 学会等名 Algebraic Geometry and Symplectic Geometry at crossroads, Kyoto (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Namikawa
2. 発表標題 Poisson deformations and birational geometry
3. 学会等名 Master Lectures -Quotients, Stability and Invariants-, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Namikawa
2. 発表標題 Towards the classification of symplectic singularities
3. 学会等名 Master Lectures -the Legacy of Carl Friedrich Gauss-, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Y. Namikawa
2. 発表標題 Towards the classification of symplectic singularities
3. 学会等名 Higher dimensional algebraic geometry, Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 並河良典	4. 発行年 2021年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 168 ページ
3. 書名 複素代数多様体 -正則シンプレクティック構造からの視点-	

1. 著者名 並河良典	4. 発行年 2021年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 180ページ
3. 書名 複素シンプレクティック多様体 -特異点とその変形-	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------