

令和 4 年 6 月 20 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17H02835

研究課題名(和文) 数論的不変式論の新展開

研究課題名(英文) New developments in arithmetic invariant theory

研究代表者

谷口 隆 (Taniguchi, Takashi)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：60422391

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,200,000円

研究成果の概要(和文)：数論的不変式論の分野で研究を行った。3次体の判別式を数える関数について、誤差項の評価を改良した。とくに局所条件をつけたときの一樣評価について、大幅な改善を得た。また、判別式が概素数である3次体や4次体が多く存在することを証明した。関連して、十種類程度の概均質ベクトル空間について新たに、軌道指数和の明示公式を得た。この他、余正則空間の研究について、いくつかの部分的成果がある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数論的不変式論は最近非常に活発な研究が行われている分野である。本研究課題において、基盤的な成果をいくつか挙げる事ができた。この分野のもっとも典型的な問題である3次体の判別式を数える問題で成果を挙げる事ができ、その方法は、他の場合にも応用できると考えられる。軌道指数和の公式は、概均質ベクトル空間や代数幾何学を超えて、数学の他分野と関連を持つ可能性がある。

研究成果の概要(英文)：We study the arithmetic invariant theory. We improved the error term estimate in the counting function for cubic fields. In particular, we significantly improved the uniformity estimate with respect to the local conditions. Also, we showed that there are large numbers of cubic and quartic fields whose discriminants have few prime factors. As a related topic, we obtained explicit formulas of the orbital exponential sums for around ten new cases of prehomogeneous vector spaces. We also obtained some partial results in the arithmetic of coregular spaces.

研究分野：整数論

キーワード：数論的不変式論 概均質ベクトル空間 3次体 判別式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

研究課題名の数論的不変式論は整数論と代数幾何の双方に跨る研究主題である。代数群の線形表現の軌道が往々にして整数論的に興味深い対象をパラメータ付けしていることを基に、さまざまな整数論的な帰結を導いたりその相互関係を論じたりするものである。数論的不変式論は、この10年余りの Bhargava の鮮烈で画期的な一連の研究によって、一躍数学の中でもっとも魅力的で活気ある研究分野の一つになった。Bhargava は現状では全く手の届かないと考えられていた楕円曲線の平均階数の有限性を鮮やかに証明してみせ、世界中の整数論と代数幾何学の研究者に衝撃を与えた。Bhargava はこれらの研究により2014年には Fields 賞を受賞した。Bhargava の研究は同時に、この領域に探索されるべき多くの主題や研究対象があることを明らかにしており、現在では幅広い分野の研究者が多様な視点で研究を開始している。

Bhargava の研究の舞台となったのは、主に余正則空間である。佐藤幹夫氏により考えられた概均質ベクトル空間もその一部になるが、概均質ベクトル空間は日本でよく研究されてきた歴史もあり、ゼータ関数を中心に、世界をリードする研究が多数ある。これらの理論を融合し、さらに発展させようという機運が高くなっていった。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、近年活発な研究の始まった数論的不変式論に新たな展開をもたらすことである。一方で最も基本的なクラスである概均質ベクトル空間についてより深く研究し、軌道指数和などの新たな不変量を計算する。他方で、数論的不変式論の舞台となる代数群の表現(G, V)や代数幾何学的対象についても研究し、数論的不変式論の有用な新理論を構築する。

同時に、これらの成果を解析的整数論へ応用する。代数体の判別式やイデアル類群の等分点、楕円曲線のセルマー群などをはじめとする種々の整数論的な量の密度定理を証明し、整数論のさまざまな分野に影響をもつ知見を与えることを目指す。

3. 研究の方法

- (1) 概均質ベクトル空間に新たに見出されつつある不変量を、具体的に計算が可能な場合を選び出して決定する。その不変量を多様な視点から考察する。代数群の表現の間に絡作用素がある場合に、考えている不変量が作用素でどう移り変わるかを追跡する。
- (2) 実験・観察段階においては、計算機を活用する。成分に不定元のある行列を扱うので、計算機による計算は効果的である。多くのデータに基づいて、分析する。
- (3) 概均質ベクトル空間や余正則空間について得られた知見を、解析的整数論へ応用する。特に素数についての一様評価は、篩法を通して、さまざまな形で解析的整数論と関わりをもつと考えられる。先行研究の方法も精査しつつ、新たな成果を得ることを目指す。
- (4) さまざまな理論を融合することで数論的不変式論の新たな成果を得ることを目指すため、それぞれの専門分野に精通した研究者の有機的な連携体制によって研究を進める。

4. 研究成果

- (1) 3次体の判別式を数える関数の誤差項の改良

Manjul Bhargava 氏 (プリンストン大) Frank Thorne 氏 (南カリフォルニア大) と共に、3次体の判別式を数える関数について、誤差項を改良する研究を行った。先行研究では X の $7/9$ 乗が得られていたが、これを X の $2/3$ 乗まで改良することができた。証明には概均質ベクトル空間のゼータ関数を用いる。

平方自由篩を用いる際に、平方自由な q でパラメータ付けられた各項をどのように評価するかが問題である。小さな q について、有限環上でのフーリエ変換の公式は得られていたが、これの q にわたる平均を考えることで、評価を大きく改善することができた。この部分については、ランダウの定理の一樣版が必要になる。David Lowry-Duda 氏 (ウォーリック数学研究所) と Frank Thorne 氏 (南カリフォルニア大) との共同研究で、計算の過程で現れる特殊関数の技術的課題を解決し、一樣版を証明した。

また、3次体に局所条件 S をつけたときの、誤差項の S についての一様評価を大きく改良した。これはやはり平均の技法を用いるが、大きな q についての一様評価を適用したことも重要なポイントになった。

Landau の定理を用いた後の証明の手順は、多重和の順序交換をさまざまに行うこと、双対空間を元の空間に埋め込むことで、整数軌道の個数を環論的な命題によって評価することからなる。当初はかなり複雑で入り組んだ証明であったが、議論の透明化に労力を払い、最終的にかなり見通しの良い証明にすることができた。概均質ベクトル空間のゼータ関数からは他にもさまざまな密度定理が得られることが期待されているが、そのような他の場合にも適用しやすい議論の形に整理できたと思われる。

副産物として、2次体の判別式を数える関数についても、局所条件をつけたときの一様性について、先行研究を改良する成果が得られた。ここではもっとも古典的な平方自由篩を用いるが、局所条件の効果的な取り扱いを考えたところがポイントである。Polya-Vinogradov の不等式を使える形にできたために、かなりよい成果を得ることができた。

これまででも、局所条件についての一様評価はさまざまな応用が見出されてきた。与えられたガロア群をもつ拡大体の判別式の分布や、Artin の L 関数のレベル 1 密度の分布などが典型的な例である。今回の改良によって、これらの成果の量的な改善が得られるが、今後もさらに様々な応用が見出されることが期待される。

(2) 軌道指数和の計算と解析的整数論への応用

Frank Thorne 氏（南カロライナ大）と共に、概均質ベクトル空間に伴う軌道指数和の効果的な計算方法を開発し、さまざまな場合に明示公式を得ていたが、この方法で他の十種類程度の概均質ベクトル空間についても、軌道指数和を計算した。これに基づいて、より複雑な概均質ベクトル空間や余正則空間についても計算ができないか、研究を続けている。

この指数和は一般に L_1 ノルムがかなり小さくなるという特徴がある。指数和の上からの評価は解析的整数論に応用を持つことがよくあるが、この特徴を活かした成果を得た。具体的には、概素数篩により、概素数判別式をもつ 3 次体および 4 次体の個数の下からの評価を得た。3 次体では先行研究を大きく改良しており、また 4 次体については、我々の知る限り初めての成果である。

ここでの概素数篩は、Ekedahl-Bhargava の幾何篩を技術的に改良したものである。指数和の L_1 ノルムの大きさは軌道の大きさに概ね逆相関しており、この特徴を効果的に用いられるような篩の技法を開発した。有理数体上の代数多様体を整数環上のモデルに持ち上げる部分についての技術的問題を解決し、また特異軌道の階層的構造について、一般的に適用しやすい形に議論を整理した。具体的に扱ったのは概均質ベクトル空間の場合であるが、余正則空間の場合にも適用可能な形になっていると考えられる。

(3) 代数体のイデアル類群の 2 捻点の個数の上からの評価

代数体のイデアル類群は、代数的整数論な問題を考えるときに頻りに立ち現れるもっとも基本的な不変量の一つであり、研究の歴史も長い。深みがあって分からない部分が依然と大部分を占める、扱いの困難な研究対象である。海外の 5 名の研究者と共同で、任意に字数を固定した代数体について、イデアル類群の 2 捻点の個数の上からの評価を与えた。応用として、楕円曲線の整数点の個数や、超楕円曲線のヤコビ多様体の階数、4 次体の個数などについて先行研究を改良する上界を得た。代数体の次数に制約のない捻点の評価が得られたのは初めてであり、研究者の注目を集めたほか、科学雑誌 *Scientific American* や *Quanta Magazine* でもその成果が話題にされた。

証明は数の幾何に、Bombieri-Pila の評価を組み合わせるものである。長さがあまり大きくないイデアルの生成元が存在すること、代数体の整数環の形状があまり歪でないことを証明した。これにより、係数の大きさに強い上限のある不定方程式の整数解の個数を評価する問題となる。Bombieri-Pila の評価を用いて、その個数の上界を与えた。3 次体と 4 次体の場合は、楕円曲線の整数点の個数を球充填の成果を応用して評価した Helfgott-Venkatesh の結果を用いて、より鋭い評価を得ることができた。

(4) その他の成果

主要な成果は上述の通りであるが、この他に、代数群の表現に伴う局所的なゼータ積分の公式や、不変式の Bernstein 多項式などについて、部分的な成果がある。興味深い現象も観察されているので、今後も研究を継続する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Bhargava M., Shankar A., Taniguchi T., Thorne F., Tsimerman J., Zhao Y.	4. 巻 33
2. 論文標題 Bounds on 2 -torsion in class groups of number fields and integral points on elliptic curves	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1087 ~ 1099
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jams/945	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ishitsuka Yasuhiro, Ito Tetsushi, Ohshita Tatsuya, Taniguchi Takashi, Uchida Yukihiro	4. 巻 12
2. 論文標題 The local-global property for bitangents of plane quartics	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 41 ~ 44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14495/jsiaml.12.41	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Taniguchi Takashi, Thorne Frank	4. 巻 376
2. 論文標題 Levels of distribution for sieve problems in prehomogeneous vector spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1537 ~ 1559
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-019-01933-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takashi Taniguchi and Frank Thorne	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Orbital exponential sums for prehomogeneous vector spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 177 ~ 213
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計7件(うち招待講演 7件/うち国際学会 5件)

1. 発表者名 Takashi Taniguchi
2. 発表標題 Bounds on 2-torsion in class groups of number fields
3. 学会等名 RIMS Workshop 2018 "Analytic Number Theory and Related Topics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 代数体のイデアル類群の2-partについて
3. 学会等名 第17回北陸数論研究集会(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takashi Taniguchi
2. 発表標題 An introduction to Shintani's zeta function for the space of binary cubic forms
3. 学会等名 The 10th Westlake Number Theory Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 Variants of Ohno-Nakagawa's dual identity
3. 学会等名 神戸整数論集会2017(招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 On the numbers of cubic and quartic fields with almost prime discriminants
3. 学会等名 第4回京都保形形式研究集会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 Uniformity in Landau's method and applications
3. 学会等名 Arithmetic Geometry and Related Topics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 谷口隆
2. 発表標題 Uniformity in Landau's method and applications
3. 学会等名 上越整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Takashi Taniguchi http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/tani/</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Kobe Number Theory Workshop 2017	開催年 2017年～2017年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Purdue university	University of South Carolina	ICERM	
カナダ	University of Toronto			
中国	西湖大学			
英国	University of Oxford	University of Warwick		