

令和 5 年 6 月 8 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17H02837

研究課題名(和文) 数論的位相幾何学の深化と新展開

研究課題名(英文) Deepening and new developments of arithmetic topology

研究代表者

森下 昌紀 (Morishita, Masanori)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：40242515

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 7,800,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果は数論的位相幾何学の深化と新展開であり、具体的には次の通りである。
(1)Hilbertの相互律の3次元葉層力学系に対する類似を求めるというDeningerの問題を解決した。さらに、3次元葉層力学系を分類するという新しい結果も得た。これを論文に発表し、国内外の研究集会で招待講演を行った。
(2)Dijkgraaf-Witten位相的場の理論の数論的類似を構築した。これを論文を発表し、国内外の研究集会で招待講演を行った。さらに、スコットランドのICMSで「Gauge fields in Arithmetic, Topology and Physics」と題するコンファレンスを主催した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究成果の学術的意義は、数論的位相幾何学という数学における新分野の創始とその深化および新展開である。社会的意義として、研究成果を査読付き国際誌に発表したこと、国内外で行われた国際研究集会で招待講演を行ったこと、さらに、本研究を契機として、2023年3月にスコットランドで「Gauge fields in Arithmetic, Topology and Physics」と題するコンファレンスを主催したこと、毎年国際研究集会「Low dimensional topology and number theory」を主催していることがあげられる。

研究成果の概要(英文)：My research achievements is concerned with deepening and new developments of arithmetic topology. The outline is as follows. (1) I solved the problem posed by Deninger jointly with J. Kim, T. Noda and Y. Terashima. Namely, we showed a dynamical analog of Hilbert reciprocity law for 3-dimensional foliated dynamical system. Moreover we gave a classification of 3-dimensional foliated dynamical systems. We published the paper on this research and I gave invited talks at conferences in Germany and US etc. (2) I constructed an arithmetic analog of (2+1)-dimensional Dijkgraaf-Witten topological quantum field theory for number rings jointly with H. Hirano and J. Kim. We published the paper on this research and I gave invited online talks at various conference and seminars. I also held the workshop at Edinburgh "Gauge fields in Arithmetic, Topology and Physics".

研究分野：数論的位相幾何学

キーワード：結び目 素数 代数体 3次元多様体 数論的位相幾何学 数論的位相的場の理論

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、1998年頃から、結び目と素イデアル、3次元多様体と整数環の類似性に基づく「数論的位相幾何学」と呼ばれる、数論と3次元位相幾何学を繋ぐ新分野を創始し、その組織的研究を行ってきた。2012年に、この分野の基礎づけ的な著書「Knots and Primes: An Introduction to Arithmetic Topology, Universitext, Springer」を出版した。

本研究課題の開始当初は、数論的位相幾何学の基礎付けは一段落し、次なる深化と新展開を目指すものとして、

- (1) 数論の幾何学化という夢に向けての数論的位相幾何学の精密化、
- (2) 数理論理における場の理論との類似性・関連性、数論的場の理論の構築を研究目標に挙げた。

2. 研究の目的

研究の太い幹(目的)は、数論的位相幾何学の精密化と数理論理との関連性の構築であり、具体的な目的は、以下の通りである：

- (1) 数論的位相幾何学の精密化の方向において最も基本的な問題として「整数環の素イデアル全体の集合に対応するような、3次元多様体内の“良い”結び目の集合は何か？」という問題がある。

この問題に対するアプローチとして、Deningerによる、3次元多様体に葉層力学系の構造を加え、力学系の閉軌道の全体を考えるというアイデアがある。それを実証するものの一つとして、「3次元葉層力学系における、数論的 Hilbert の相互律を与えよ」という Deninger の問題提起があり、その解決を本研究課題の具体的な目的の一つとした。

- (2) 次に、場の理論との類似性・関連性においては、近年、Minhyong Kim による、数論的位相幾何学に基づく数論的 Chern-Simons 理論の構築という研究がある。この研究は始まったばかりで、その基礎づけ部分として、数論的 Chern-Simons 理論を Atiyah の位相的場の理論の枠組みで捉えることを本研究課題の具体的な目的の一つとした。

3. 研究の方法

研究の方法は、研究代表者が長年研究してきた数論的位相幾何学の類似性に基づいて、以下のように行った。

- (1) Hilbert の相互律の 3次元葉層力学系に対する類似を求める、という Deninger の問題については、先行する Bloch, Beilinson, Deligne による tame symbol の研究の 3次元実多様体版を求める、というアイデアで、3次元実多様体の smooth Deligne cohomology を用いて行った。Smooth Deligne cohomology に詳しい寺嶋郁二氏、葉層構造に詳しい野田健夫氏、および九大博士課程の大学院生 Junhyeong Kim 氏との共同研究という形で行われた。

- (2) 数論的 Chern-Simons 理論を Atiyah の位相的場の理論の枠組みで捉えるという問題については、まず、ゲージ群が有限群の場合、すなわち、Dijkgraaf-Witten 理論に対応する数論的類似について研究した。そのために、 $(2+1)$ 次元位相的場の理論における 2次元多様体に対応するものとして、代数体の整数環の素イデアル P に対する P 進体を考えた。また、Dijkgraaf-Witten 位相的場の理論で基本的な transgression 写像の数論的な類似を Galois 群の cohomology に対して考えた。この研究は、九大博士課程の大学院生 Junhyeong Kim 氏、平野光氏との共同研究という形で行われた。

4 . 研究成果

研究成果は、本研究開始当初に掲げた 2 つの研究課題(研究目的の項の(1), (2))をとともに解決、遂行したことである。具体的には次の通りである。

(1) Hilbert の相互律の 3 次元葉層力学系に対する類似を求める、という Deninger の問題を解決した。さらに、研究課程のなかで、3 次元葉層力学系を分類する、という新しい結果も得た。これを次の論文

Junhyeong Kim, Masanori Morishita, Takeo Noda, Yuji Terashima: On 3-dimensional foliated dynamical systems and Hilbert type reciprocity law, Muenster J. of Math. 14, 323-348, 2021. (査読有)

にまとめて発表した。この研究成果について、国内外の研究集会で招待講演を行った。特に、2018 年にドイツで行われた Deninger 還暦記念コンファレンス、2019 年に米国で行われた Japan-US コンファレンスで招待講演を行った。

(2) Dijkgraaf-Witten 位相的場の理論の数論的類似を構築する研究課題も、研究方法で述べた方法で、遂行した。これについて、次の論文

Hikaru Hirano, Junhyeong Kim, Masanori Morishita: On arithmetic Dijkgraaf-Witten theory, Communications in Number Theory and Physics, 17, (1), 1-61, 2023. (査読有)

にまとめて発表した。この研究成果について、国内外の研究集会でオンライン招待講演を行った。特に、2021 年に京都で行われた Pan Asian Number Theory コンファレンスで招待講演を行った。

さらに、この研究を契機として、2023 年 3 月にスコットランド、エジンバラの ICMS で、「Gauge fields in Arithmetic, Topology and Physics」と題するコンファレンスを主催した。これら研究集会のために本科研費を有効に使った。

また、2009 年以来毎年 3 月に研究集会「Low dimensional topology and number theory」を主催しており、海外からの研究者招聘に科研費を使い、研究交流の成果をあげている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Hikaru Hirano, Masanori Morishita	4. 巻 198
2. 論文標題 Arithmetic topology in Ihara theory II: Milnor invariants, dilogarithmic Heisenberg coverings and triple power residue symbols	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 211, 238
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2018.10.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Hikaru Hirano, Masanori Morishita	4. 巻 198
2. 論文標題 Arithmetic topology in Ihara theory II - Milnor invariants, dilogarithmic Heisenberg coverings and triple power residue symbols	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 211, 238
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2018.10.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 T. Kitayama, M. Morishita, R. Tange, Y. Terashima	4. 巻 370, no.5
2. 論文標題 On certain L-functions for deformations of knot group representations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 3171-3195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/7037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Amano, Y. Mizusawa, M. Morishita	4. 巻 4, Art 7
2. 論文標題 On mod 3 triple Milnor invariants and triple cubic residue symbols in the Eisenstein number field	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Research Number Theory	6. 最初と最後の頁 1-29
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-018-0100-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Masanori Morishita
2. 発表標題 On 3-dimensional foliated dynamical systems and Hilbert type reciprocity law
3. 学会等名 JAMI conference, Johns Hopkins University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masanori Morishita
2. 発表標題 On 3-dimensional foliated dynamical systems and Hilbert reciprocity law
3. 学会等名 Arithmetic and Analysis on the occasion of Deninger's 60th birthday (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masanori Morishita
2. 発表標題 Arithmetic topology in Ihara theory: Milnor invariants, Heisenberg covers and triple power residue symbols
3. 学会等名 Profinite monodromy, Galois representations, and Complex functions in honor of Professor Yasutaka Ihara's 80th birthday (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masanori Morishita
2. 発表標題 On local symbols and the reciprocity law for foliated dynamical systems on 3-manifolds
3. 学会等名 Workshop on Arithmetic Chern-Simons Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masanori Morishita
2. 発表標題 Milnor invariants in Ihara theory and triple power residue symbols
3. 学会等名 Low dimensional topology and number theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Masanori Morishita
2. 発表標題 On 3-dimensional foliated dynamical systems and Hilbert reciprocity law
3. 学会等名 Arithmetic and Analysis in honor of Deninger's 60th birthday (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Low dimensional topology and number theory XI, Osaka University	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Low dimensional topology and number theory X	開催年 2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関