

令和 5 年 6 月 28 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17H02840

研究課題名(和文) 離散群の非等長的作用の剛性と非線形スペクトルギャップ

研究課題名(英文) Rigidity of non-isometric actions of discrete groups and non-linear spectral gap

研究代表者

納谷 信 (Nayatani, Shin)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：70222180

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,700,000円

研究成果の概要(和文)：有限グラフのユークリッド空間への埋め込みに関する最適化問題と線形スペクトルギャップの最大化問題を研究し、距離正則グラフについて最適解を求めることができた。有限グラフ上で線形スペクトルギャップを最大化する長さ関数を求める問題を研究し、Nadirashvili型定理を証明した。多様体の埋め込みと線形スペクトルギャップに関する新たな最適化問題を研究し、いくつか最適化問題が解ける例を与えたとともに、Nadirashvili型定理を証明した。ランダム・ウォークが与えられた有限生成群上の離散的同変調和写像が、適切な仮定の下で境界写像を誘導することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、ラプラシアン第1固有値のように、それ自身変分問題の最適値であるものをリーマン計量をすべて動かしてさらに最大化するという、高次の変分問題を扱っており、数学研究の新たな発展に関わるものと考えている。新たにNash等長埋め込みと関連する双対最適化問題を設定したことも意義があろう。離散と連続にまたがる研究であり、材料科学への示唆も期待できよう。

研究成果の概要(英文)： We studied the optimization problems concerning embeddings into Euclidean spaces and the linear spectral gap of a finite graph and were able to find optimal solutions for a distance-regular graph. We studied the problem of finding an edge-length function maximizing the linear spectral gap and proved a Nadirashvili type theorem. We studied a new optimization problem concerning embeddings and the linear spectral gap of a manifold. We presented some examples where the problems can be solved and proved a Nadirashvili type theorem. We showed that a discrete equivariant harmonic map from a finitely generated group equipped with a random walk induces a boundary map under appropriate assumptions.

研究分野：微分幾何学

キーワード：スペクトルギャップ最大化 最適埋め込み 離散群の剛性 球面内の極小曲面

1. 研究開始当初の背景

Margulis超剛性定理や, Kazhdanの性質(T)に関わるDelorme-Guichardetの定理は, ある種の離散群の幾何学的空間への作用が極めて限定されることを主張する. そのような主張は, 多くの場合, 離散群のCAT(0)空間(非正曲率測地的距離空間)への等長的作用が必然的に大域的固定点をもつという固定点性質として述べられる.

1990年代後半から2000年代前半にかけて, Zuk, Ballman-Swiatkowski, Gromov, Silberman等によって, 離散群(あるいはそれが作用する単体的複体)の局所的不変量に関する性質(T)の判定条件が与えられ, また, 様々なモデルのランダム群が性質(T)をもつ無限双曲群であることが示された.

一方, 研究代表者と研究分担者・井関裕靖は, 単体的複体の基本群であるような離散群のCAT(0)空間への作用の超剛性・固定点性質を, 単体的複体からCAT(0)空間への離散的調和写像を用いて研究する手法を確立した. また, その後, 近藤剛史を加えた研究において, 写像の n ステップエネルギーの手法により, グラフモデルのランダム群が広いクラスのCAT(0)空間に対して一斉に固定点性質をもつことを明らかにした.

2. 研究の目的

目的は二つある. 一つは, これまで等長作用に対して行なってきた固定点性質の研究を, 非等長作用にまでその対象を広げ, 非等長作用に対する固定点性質を確立することである. とくに, ある種のランダム群について, そのヒルベルト空間へのアフィン作用のリプシッツ定数が群上の語距離に関してある程度低い増大度をもてば, 大域的固定点をもつことを示したい.

今一つの目的は, 有限グラフのCAT(0)空間に対する非線形スペクトルギャップを評価・計算する手法を確立することである. この課題は, 代数群に付随する空間がユークリッド的ビルディングである場合に, 離散的調和写像の手法によってMargulis超剛性定理の幾何学的別証明を与えるという問題の解決に向けてのものである.

3. 研究の方法

第1の目的の達成のためには, 有限生成群のヒルベルト空間へのアフィン作用でそのリプシッツ定数が群上の語距離に関して多項式的増大度をもつものに対して, 作用と同変な群からヒルベルト空間への離散的調和写像の存在を示すことが鍵になる. 同変調和写像の存在を示すためには, 一種の(離散的)勾配流を用いるが, これは一般には収束しないので, ヒルベルト空間とそこへのアフィン作用および同変写像の列を適切に構成し, その超極限をとることで作用と同変調和写像を得ることを考える. この戦略は, 元のアフィン作用が一様有界である場合には機能するが, そうでない場合に新しい作用が極限ヒルベルト空間への作用に収束するためには, 元の作用のリプシッツ定数が各共役類上で有界であるという技術的な仮定をおく必要がある. この仮定を外して調和写像の存在を導くために, 調和写像の存在証明の手法のさらなる改良に取り組む. これまでの議論においては, スケール超極限を取る際に作用を共役なもの列に取り替えており, そのリプシッツ定数の発散の可能性が問題であったので, 作用の取り替え方を工夫するなどにより, この問題を回避することを試みる.

第2の目的に向けては, 一般に非線形スペクトルギャップは線形スペクトルギャップに比べて

値が下がるので、ターゲットであるCAT(0)空間の幾何学的情報から、この下がり具合を評価するというのがこれまでの手法であった。実際、非線形スペクトルギャップは、線形スペクトルギャップとCAT(0)空間の不変量の積によって下から抑えられる。一方、研究代表者は、近年、曲面における線形スペクトルギャップの最大化という問題に取り組み、そこから、グラフの場合にもラプラシアン の定義に関わるパラメーターを適切に選んで線形スペクトルギャップをなるべく大きくし、それにより非線形スペクトルギャップの下からの評価を改善するという着想を得た。そこで、グラフにおける線形スペクトルギャップの最大化問題に取り組むことにした。

4. 研究成果

第1の目標については、アフィン作用のリプシッツ定数が語距離に関して多項式的増大度をもつという仮定のもとで、同変調和写像の存在を示す試みは完結できていない。一方、共役類において語距離の最小値をとった共役距離というものを考えると、アフィン作用のリプシッツ定数が共役距離に関して多項式的増大度をもつという仮定のもとでは同変調和写像の存在がいていた。この場合、共役類が無限個存在するかが未知だったが、実際に無限個存在し、したがって上記の仮定が実質的な意味を持つことが確認できた。これにより、グラフモデルのランダム群について、そのヒルベルト空間へのアフィン作用のリプシッツ定数が群上の共役距離に関してある程度低い増大度をもてば、大域的固定点をもつという結果を、実質的に新しい結果として確立することができた。

以下、第2の目標に関わる成果を記述する。有限グラフのユークリッド空間への埋め込みに関する最適化問題と線形スペクトルギャップの最大化問題について研究を行なった。この研究は、有限グラフの非線形スペクトルギャップの研究に動機付けられたものである。研究の出発点として、これらの問題が半正値計画問題として互いに双対の関係にあることを確認した。類似の埋め込み最適化問題としてGoering-Wappler-Helmsbergによるものが知られていたが、両者の埋め込み最適化問題の関係を明らかにすることにより、我々の埋め込み最適化問題の最適値と線形スペクトルギャップの最大値の間にもある等式が成立することが示せた。応用として、位相的にフラレンと同型なグラフ上の重みを、線形スペクトルギャップを最大化するように定める問題を解くことができた。同様の手法により、アルキメデス多面体を始めとして対称性の高い様々な多面体について、我々およびGoering達の埋め込み最適化問題の解を求めることができた。さらに、これらの結果を、問題の設定段階で指定する辺長パラメータが一様でない(ただし、グラフの自己同型群で不変ではある)場合にも拡張した。また、これらの最適化問題を、距離正則とよばれる性質をもつグラフに対して一般的に解くことができた。以上の研究は、連携研究者・小林俊公、連携研究者・近藤剛史、五明工との共同研究である。成果を論文にまとめ、専門誌に投稿した。現在、査読意見に対応して改訂作業を進めている。

続いて、閉曲面上でラプラシアン の第1固有値を最大化するリーマン計量を求める問題の、有限グラフにおける離散類似を定式化して研究を行なった。有限グラフの辺集合上の長さ関数に対応するラプラシアンとして、藤原耕二によって定義されたものを採用し、ラプラシアン第1固有値を最大化する長さ関数を求める問題である。最大化する(あるいはより一般にextremalな)長さ関数が存在するとき、対応するラプラシアン の第1固有関数を使って、ユークリッド空間へのよい双リプシッツ写像が構成できることを示した。実際、この写像とユークリッド距離によって、長さ関数を明示的に表示することができる。この結果は曲面の場合のNadirashviliの定理の離散類似とみなされる。この研究は五明工との共同研究である。成果を論文にまとめ、専門誌に投稿した。現在、査読意見に対応して改訂作業を進めている。

研究代表者は、2016年度に、庄田敏宏とともに、Bolza曲面とよばれる種数2の閉リーマン面上のある特異計量（リーマン面の構造と両立するもの）が、面積一定という条件下でラプラシアン第1固有値を最大化するというJacobson-Levitin-Nadirashvili-Nigam-Polterovichの予想を肯定的に解決していた。この研究を契機として、本研究課題では、多様体の埋め込みとラプラシアン第1固有値に関する新たな最適化問題を着想し、研究を行った。与えられたリーマン多様体からユークリッド空間への1リプシッツ写像全体にわたって分散を最大化する問題を考える。この問題の双対問題を定式化することができ、ある一つの制約条件をみたすすべてのリーマン計量にわたって重み付きリーマン多様体のBakry-Emeryラプラシアンの第1固有値を最大化する問題となる。（ここで、体積要素は初期リーマン計量のそれであり、また、制約条件にも初期リーマン計量が関係する。）いくつか最適化問題が解ける例を与え、とくに、初期計量として2次元トーラス上の任意の平坦計量をとったとき、最適化問題をほぼ完全に解く事ができた。また、Nadirashvili型定理を証明した。この定理は、第1固有値最大化問題が解けたならば、埋め込み最適化問題も解けて、分散最大の等長はめ込みが得られることを主張する。

閉曲面上の面積一定のリーマン計量全体にわたって、ラプラシアンの第1固有値を最大化するとき、もし最大化する計量が存在するならば、それは球面への第1固有関数による極小はめこみによる誘導計量として与えられることが知られている。したがって、球面内の高種数の極小閉曲面を構成することで、そのような最大化計量の候補が得られるということがある。種数3以上の場合に最大化計量が未知であるので、とくに種数が低い例を与えることを目指すことにした。Lawsonによる、3次元球面において、プラトー問題の解を折り返して極小閉曲面を得るという手法を高次元化し、 n 次元球面の3角形分割として正胞体を用いることで高種数の極小閉曲面を構成した。ただ、この構成で得られる極小閉曲面は自己交叉点を多く持ち、しかも種数が高くなる傾向がある。最大化計量を与える極小閉曲面は、高い対称性を持つとともに、自己交差が少ないことが期待される。そこで、別の構成法を考案して、自己交叉が少なく種数も低い例を見出すことにした。DPW法が最も有力な手法と考えられ、一般論は存在するので、この手法を高次元球面の場合に実装することにより、極小曲面の構成を目指すことにした。本研究課題においては、成田知将と共同で、7次元球面内の極小曲面に対してSym-Bobenko型公式の定式化を試みるなどした。

Lie群の格子の剛性を導くにあたっては、非正曲率空間の無限遠境界の間の写像(境界写像)を用いる手法が有効であるが、一方で、格子が自然な作用をするRiemann対称空間からの同変調和写像を用いる手法も非常に有効であった。研究分担者・井関裕靖は、これらの一見異なるアプローチを、ランダム・ウォークが与えられた(Lie群の格子とは限らない)有限生成群上の離散的同変調和写像が適切な仮定の下で境界写像を誘導することを示すことによって統合し、有限生成群の無限遠境界の幾何学の視点から剛性という現象の根源を明らかにすることを目指して研究を行なった。その結果、ランダム・ウォークが与えられた有限生成群 G が非正曲率距離空間 Y に等長的に作用する場合における、 G の軌道に移植されたランダム・ウォークの挙動を明らかにし、 Y が有限なtelescopic次元をもつ場合に、次のいずれかが成り立つことを示すことができた。(1) G のPoisson境界から Y の幾何学的無限遠境界へのそれぞれへの G の作用に関して同変な境界写像が存在する。(2) Y の中に G の作用で不変な平坦部分空間が存在する。(1)が成立しない場合、 Y に移植されたランダム・ウォークの軌道の中で移動距離の増加幅が減少していくようなものが必ず存在する。この軌道から、実際に Y とその幾何学的無限遠境界の和集合の中で収束する部分列の存在を示すことが課題であったが、これは超極限を繰り返すと、とい

うこれまでにない新しい手法により解決することができた。成果を論文にまとめ、専門誌に発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Shin Nayatani, Toshihiro Shoda	4. 巻 357
2. 論文標題 Metrics on a closed surface of genus two which maximize the first eigenvalue of the Laplacian	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Comptes Rendus Mathematique, Academie des Sciences, Paris	6. 最初と最後の頁 84-98
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Shin Nayatani	4. 巻 B66
2. 論文標題 Fixed-point property for affine actions on a Hilbert space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 115-131
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroyasu Izeki	4. 巻 33
2. 論文標題 Isometric group actions with vanishing rate of escape on CAT(0) spaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Geometric and Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 170-244
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計28件（うち招待講演 18件/うち国際学会 7件）

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 First-eigenvalue maximization and embedding optimization
3. 学会等名 The 3rd Japan-Taiwan Joint Conference on Differential Geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 First-eigenvalue maximization and embedding optimization
3. 学会等名 第6回日中幾何学研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 五明 工, 納谷 信
2. 発表標題 有限グラフの埋め込み不変量の最小化と第1固有値の最大化
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 Metrics maximizing the first eigenvalue of the Laplacian on a closed surface
3. 学会等名 Mathematics Colloquium, University of Warwick (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 ラプラシアン第1固有値を最大化する閉曲面上の計量について1, 2
3. 学会等名 Workshop on geometry of networks and related topics in Kagoshima (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 Riemannian metrics maximizing the first eigenvalue of the Laplacian on a closed surface
3. 学会等名 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 Riemannian metrics maximizing the first eigenvalue of the Laplacian on a closed surface
3. 学会等名 The first Geometry Conference for Friendship of Japan and Germany (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 有限グラフの第1固有値の最大化と埋め込み不変量の最小化
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 Riemannian metrics maximizing the first eigenvalue of the Laplacian on a closed surface
3. 学会等名 研究集会 Geometry and Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin Nayatani
2. 発表標題 ラプリアンの第1固有値を最大化する閉曲面上の計量について
3. 学会等名 福島幾何学研究集会2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shin Nayatani
2. 発表標題 ラプリアンの第1固有値の最大化と極小曲面(企画特別講演)
3. 学会等名 2018年度秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shin Nayatani
2. 発表標題 Bolza曲面上の三つの計量
3. 学会等名 研究集会「Geometry of Riemann surfaces and related topics」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Shin Nayatani
2. 発表標題 Metrics maximizing the first eigenvalue of the Laplacian on a closed surface and extra eigenfunction (Mini-course)
3. 学会等名 UK-Japan Winter School "Variational problems in geometry and mathematical physics" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin Nayatani
2. 発表標題 高次元多面体と極小曲面
3. 学会等名 高次元多面体勉強会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin nayatani
2. 発表標題 Metrics on a closed surface of genus two which maximize the first eigenvalue of the Laplacian
3. 学会等名 第3回日中幾何学研究集会(The 3rd Japan-China Geometry Conference) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 ラプラシアン第1固有値を最大化する閉曲面上の計量について
3. 学会等名 福岡大学微分幾何セミナー
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 Hersch-Yang-Yauの不等式と閉曲面上の第1固有値の最大化について
3. 学会等名 Workshop 「Geometric Analysis in Geometry and Topology 2017」 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 ラプシアン第1固有値を最大化する閉曲面上の計量について
3. 学会等名 研究会「リーマン幾何と幾何解析」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 庄田 敏宏、納谷 信
2. 発表標題 ラプシアン第1固有値を最大化する種数2閉曲面上の計量
3. 学会等名 日本数学会2018年度年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroyasu Izeki
2. 発表標題 Boundary maps and harmonic maps from finitely generated groups into CAT(0) spaces
3. 学会等名 Workshop on Surface Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 井関 裕靖
2. 発表標題 有限生成群上のランダム・ウォークと調和写像
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究会2022 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hiroyasu Izeki
2. 発表標題 Boundary maps from finitely generated groups to CAT(0) spaces
3. 学会等名 Boston-Keio-Tsinghua Summer Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 ラプリアンの第1固有値を最大化する閉曲面上の計量について
3. 学会等名 東京大学複素解析幾何セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 ラプリアン第1固有値最大化と埋め込み最適化
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 ラプリアン第1固有値最大化と埋め込み最適化
3. 学会等名 東京都立大学幾何学セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 五明 工, 納谷 信
2. 発表標題 有限グラフの第1固有値の最大化と埋め込み
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin Nayatani
2. 発表標題 First-eigenvalue and embedding]{First-eigenvalue maximization and embedding optimization
3. 学会等名 Correspondences of various geometries (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 納谷 信
2. 発表標題 第1固有値最大化と埋め込み最適化
3. 学会等名 福岡大学微分幾何研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	井関 裕靖 (Izeki Hiroyasu) (90244409)	慶應義塾大学・理工学部(矢上)・教授 (32612)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	小林 俊公 (Kobayashi Toshimasa) (30399125)	摂南大学・工学部・准教授 (34428)	
連携研究者	近藤 剛史 (Kondo Takefumi) (60467446)	鹿児島大学・理工学研究科・准教授 (17701)	
連携研究者	豊田 哲 (Toyoda Tetsu) (50599701)	工学院大学・教育推進機構・准教授 (32613)	
連携研究者	見村 万佐人 (Mimura Masato) (10641962)	東北大学・理学研究科・准教授 (11301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 RIMS Review Seminar, Symmetry and Stability in Differential Geometry of Surfaces	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Rigidity School Nagoya 2018	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Rigidity School Nagoya 2017	開催年 2017年～2017年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------