

令和 5 年 4 月 27 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17H02848

研究課題名(和文) 不確定特異点を持つD-加群と幾何学的モノドロミーの研究

研究課題名(英文) Study on D-modules with irregular singular points and geometric monodromies

研究代表者

竹内 潔 (Takeuchi, Kiyoshi)

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：70281160

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,400,000円

研究成果の概要(和文)：不確定特異点を持つホロノミーD加群のフーリエ変換の基本的な性質を解明した。特にその特異集合を具体的に記述し、それに沿う不確定度(指数因子)が元のホロノミーD加群の特性多様体と指数因子を用いて記述できることを示した。これらの結果は約30年前の Brylinskiの結果を大きく拡張するものである。この研究のために、さらに我々は有理型関数の無限遠点や不確定点における特異性について研究を行った。また副産物として、有理型関数にたいするBernstein-佐藤多項式を発見し、その基本的な性質を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

望月とKedlayaの理論により、近年不確定特異点を持つホロノミーD加群の理論は劇的な進展を遂げた。我々の研究は、それをホロノミーD加群のフーリエ変換の基本的な性質の解明という、代数解析学における長年の未解決問題に応用したものである。またこの研究の過程において、有理型関数の無限遠点や不確定点における特異性について基礎的な研究を行った。これらは非常に自然な数学的对象であるが、なぜかこれまで研究されなかったものであり、今後自然科学の多方面に応用が期待できる。

研究成果の概要(英文)：We clarified the basic properties of the Fourier transforms of irregular holonomic D-modules. In particular, we described explicitly their singular sets and showed that the irregularities (exponential factors) along them can be described by the characteristic varieties and the exponential factors of the original holonomic D-modules. These results largely extend those obtained by Brylinski about 30 years ago. In the course of our research, we studied also the singularities of meromorphic functions at infinity and at their points of indeterminacy. As a byproduct, we found also Bernstein-Sato polynomials for meromorphic functions and studied their basic properties.

研究分野：代数解析学とその特異点理論への応用

キーワード：D加群 不確定特異点 特異点理論 有理型関数 フーリエ変換 Bernstein-佐藤多項式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

望月と Kedlaya の理論により、近年不確定特異点を持つホロノミー-D 加群の理論は劇的な発展を遂げた。特に D'Agnolo と 柏原は、不確定特異点を持つホロノミー-D 加群にたいするリーマンヒルベルト対応を確立した。一方フーリエ変換は D 加群の理論で基本的な対象だが、高次元の場合の詳しい性質は、ほとんど何も解明されていなかった。そこで我々は D'Agnolo と 柏原のリーマンヒルベルト対応を用いて、正則ホロノミー-D 加群のフーリエ変換の詳しい性質を解明した。特にその特異集合を具体的に記述し、それに沿う不確定度(指数因子)が元の正則ホロノミー-D 加群の特性多様体を用いて記述できることを示した。この研究をさらに推し進めて、不確定特異点を持つ一般のホロノミー-D 加群のフーリエ変換の基本的性質を解明することは、代数解析学における長年の未解決問題の解決につながると期待された。他方、これまでの我々の研究により、多項式の定める写像のモノドロミーや特異性については多くの結果が得られていた。これら有理式や有理型関数の定める写像の場合に拡張することは、非常に自然な問題であり、自然科学の多方面への応用が期待できた。またモノドロミー予想は現代数学における深遠な予想であるが、高次元な場合はほとんど未解明であった。これを解決することは代数幾何、特異点理論、代数解析学、整数論などに多大な波及効果が見込まれた。

## 2. 研究の目的

D'Agnolo と 柏原のリーマンヒルベルト対応を用いて、不確定特異点を持つ一般のホロノミー-D 加群のフーリエ変換の基本的性質を解明する。特にその特異集合を具体的に記述し、それに沿う不確定度(指数因子)を決定する。また関連して、有理式や有理型関数の定める写像のモノドロミーや無限遠点、不確定点における特異点を表す公式を求める。これにより、代数解析学と特異点理論の双方において基礎理論のさらなる進展を図る。またモノドロミー予想については、高次元の場合の指針を得るために、まずは非退化条件という弱い条件をみたく場合を研究する。

## 3. 研究の方法

不確定特異点を持つ一般のホロノミー-D 加群のフーリエ変換を研究するために、柏原と Schapira による(一般化された)フーリエ佐藤変換の理論を用いる。そのためには、元のホロノミー-D 加群の指数因子の定める(一般には分岐した多価の)有理型関数の無限遠点や不確定点における特異性を詳しく調べる必要がある。Deligne による正則関数にたいする消滅サイクル関手の理論を、有理型関数にたいするものに拡張し整備することで、これらを詳しく調べることができると期待される。また非退化条件をみたく場合のモノドロミー予想については、トーリック多様体の理論により良い特異点解消があるので、それを用いて予想の解決に取り組んだ。

## 4. 研究成果

不確定特異点を持つ一般のホロノミー-D 加群のモデルともいえる、あるホロノミー-D 加群の族にたいして、それらのフーリエ変換の基本的性質を解明した。特にその特異集合を具体的に記述し、それに沿う不確定度(指数因子)を元のホロノミー-D 加群の特性多様体と指数因子を用いて記述することに成功した。これらは、約 30 年前の Brylinski の結果を大きく拡張するものである。我々のフーリエ変換の記述においては、我々が "irregular characteristic cycle" と呼ぶ、ホロノミー-D 加群の特異性を加味した(錐的とは限らない)ラグランジュ輪体が本質的な役割を果たした。以上の研究のために、有理型関数のモノドロミーや無限遠点、不確定点における特異性について詳しく研究し、多くの研究結果を得た。その際、まず Deligne による消滅サイクルの理論を有理型関数の場合に拡張し、その関手的性質を調べた。有理型関数のミルナーファイバーのコホモロジーについては、これまで知られていなかった新しい消滅定理を証明することで、有理型関数のミルナーモノドロミーの固有値の具体的な記述に初めて成功した。そのために、特に偏屈層の理論を用いた。さらにモチヴィックミルナーファイバーや混合ホッジ加群の理論を合わせ用いることで、ミルナーモノドロミーの固有値だけでなく、ジョルダン標準型を求めることにも成功した。有理型関数の無限遠点における特異性については、まず多項式写像にたいする無限遠点における従順性についての定義を有理型関数の場合に拡張した。さらにそれを用いて、有理関数の定める写像の分岐点集合を、有理関数の分母と分子に現れる多項式のニュートン多面体を用いて記述した。これは Nemethi と Zaharia の定理による多項式写像の分岐点集合の記述を有理関数の場合に拡張するものであり、今後のさらなる発展が期待できる。また関連して、正則関数にたいする Bernstein-佐藤多項式(b-関数)の古典的な理論を、有理型関数にたいするものに拡張した。この有理型関数にたいする b-関数の発見は、まったく予期できなかった研究の副産物である。我々は、この一般化された b-関数の根の有理性を示し、さらに柏原-

Malgrange 型定理 (b-関数の根とミルナーモノドロミーの固有値の対応) や乗法的イデアル層の jumping number などについて、正則関数の場合と同様の結果を証明した。p-進体上での局所ゼータ関数は井草ゼータ関数と呼ばれ、その極と複素超曲面の局所ミルナーモノドロミーの間には、「モノドロミー予想」という深遠な予想が提唱されている。我々は Denef-Loeser が導入した位相的ゼータ関数についてのモノドロミー予想を、非退化条件という弱い条件をみたす場合に研究し、高次元の場合でも多くの場合に予想が正しいことを示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 T.T. Nguyen、齋藤隆大、竹内潔	4. 巻 298
2. 論文標題 The bifurcation set of a rational function via Newton polytopes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Math. Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 899-916
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 齋藤隆大、竹内潔	4. 巻 -
2. 論文標題 On the monodromies and the limit mixed Hodge structures of families of algebraic varieties	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Michigan Math. J.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 A. Esterov、A. Lemahieu、竹内潔	4. 巻 24
2. 論文標題 On the monodromy conjecture for non-degenerate hypersurfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. of European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3873-3949
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T.T. Nguyen、竹内潔	4. 巻 -
2. 論文標題 Meromorphic nearby cycle functors and monodromies of meromorphic functions (with Appendix by T. Saito)	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Revista Matematica Complutense	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 竹内潔	4. 巻 70
2. 論文標題 Bifurcation values of polynomial functions and perverse sheaves	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier	6. 最初と最後の頁 597-619
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 伊藤要平、竹内潔	4. 巻 63
2. 論文標題 On some topological properties of Fourier transforms of regular holonomic D-modules	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Canadian Math. Bulletin	6. 最初と最後の頁 454-468
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 伊藤要平、竹内潔	4. 巻 366
2. 論文標題 On irregularities of Fourier transforms of regular holonomic D-modules	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 池祐一、松井優、竹内潔	4. 巻 2018
2. 論文標題 Hyperbolic localization and Lefschetz fixed point formulas for higher-dimensional fixed point sets	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Int. Math. Res. Not.	6. 最初と最後の頁 4852-4898
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnx030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Esterov、竹内潔	4. 巻 231
2. 論文標題 On vanishing theorems for local systems associated to Laurent polynomials	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Nagoya Math. Journal	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2017.8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 竹内潔	4. 巻 -
2. 論文標題 On a Bernstein-Sato polynomial of a meromorphic function	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nagoya Math. Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 竹内潔
2. 発表標題 Fourier transforms of holonomic D-modules and irregular characteristic cycles
3. 学会等名 研究集会 ``Singularities and Algebraic Geometry'', Khanh Hoa 大学 (ベトナム、ニャチャン) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 竹内潔
2. 発表標題 Exponential factors and Fourier transforms of D-modules
3. 学会等名 AGA Porto 2019, Higgs bundles and D-modules (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹内潔
2. 発表標題 Meromorphic nearby cycle functors and monodromies of meromorphic functions
3. 学会等名 Non-isolated singularities and derived geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹内潔
2. 発表標題 On irregularities of Fourier transforms of regular holonomic D-modules
3. 学会等名 27th ICFIDCAA Krasnoyarsk (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹内潔
2. 発表標題 On irregularities of Fourier transforms regular holonomic D-modules
3. 学会等名 第14回代数解析幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹内潔
2. 発表標題 On the monodromies and the limit mixed Hodge structures of families of algebraic varieties
3. 学会等名 Singularity theory conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 竹内潔
2. 発表標題 On the monodromy conjecture for non-degenerate hypersurfaces
3. 学会等名 3rd PRIMA congress in Oaxaca (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 竹内潔
2. 発表標題 On irregularities of Fourier transforms of regular holonomic D-modules
3. 学会等名 Riemann-Hilbert correspondences (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 竹内潔	4. 発行年 2017年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 324
3. 書名 D加群	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Hypergeometric functions and mirror symmetry	開催年 2018年～2018年
--	--------------------



8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ロシア連邦	Higher school of economics			
ベトナム	VAST			
フランス	ニース大学			